Ingenieurmathematik 1
Studiengang Maschinenbau

Dr. Robert Lang

OTH Regensburg

Stand: April 2021

Inhaltsverzeichnis

Kontaktinformationen

@ robert.lang@extern.oth-regensburg.de

OTH Regensburg - Fakultät Informatik und Mathematik

Literatur

Ingenieurmathematik

T. Arens, *Mathematik*, Springer Spektrum

T. Arens, *Arbeitsbuch Mathematik*, Springer Spektrum

G. Hoever, *Höhere Mathematik Kompakt*, Springer Spektrum

G. Hoever, *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer Spektrum

J. Koch/M. Stämpfle, *Mathematik für das Ingenieurstudium*, Hanser

M. Knorrenschild, *Mathematik für Ingenieure 1+2*, Hanser

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 1+2*, Vieweg

Y. Stry/R. Schwenkert, *Mathematik kompakt*, Springer

T. Westermann, *Mathematik für Ingenieure*, Springer Spektrum

Formelsammlungen

L. Papula, *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Vieweg

H. Bartsch, *Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Hanser

Philosophie

Die Mathematik muß man schon deswegen studieren, weil sie die Gedanken ordnet.
M. W. Lomonossow

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.
A. Einstein

Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben.
Archimedes

Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben.
G. Galilei

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Definition 1.1
Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche **Elemente** der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Sei M eine Menge und x ein Objekt, so schreibe

$x \in M$, falls x ein Element von M ist und

$x \notin M$, falls x kein Element von M ist.

Zwei Mengen M, N heißen **gleich**, wenn sie dieselben Elemente enthalten (Schreibweise: $M = N$). Sind M und N nicht gleich, so schreibe $M \neq N$.

Beispiel 1.1 Der Mengenbegriff ist in der Mathematik sehr grundlegend:

(i) Die Vorlesungen des ersten Semesters Maschinenbau bilden eine Menge:

$$V = \{\text{Ingenieurmathematik 1, Technische Mechanik}, \ldots\}$$

Ein Element ist etwa diese Vorlesung: Ingenieurmathematik 1 $\in V$. Manche Fächer sind nicht Teil eines Maschinenbaustudiums, z.B. Philosophie $\notin V$. Die Menge V enthält nur eine endliche Zahl von Elementen, sie ist daher eine **endliche Menge**.

(ii) Alle Wörter der deutschen Sprache bilden eine Menge:

$$D = \{\text{der, die, das, Vorlesung, Mathematik}, \ldots\}$$

Da im Deutschen beliebige lange Komposita gebildet werden können (z.B. Donaudampfschiffahrtsgesellschaftskapitän), ist D eine **unendliche Menge**. Ein (gedrucktes) Wörterbuch W listet endlich viele deutsche Wörter auf:

$$W = \{\text{Aachen}, \ldots, \text{das, der, die, Mathematik, Vorlesung}, \ldots, \text{Zucker}\}$$

W ist also eine endliche Menge, daher gilt $W \neq D$.

(iii) Bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an. Es handelt sich im Folgenden stets um die gleiche Menge:

$$\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{2,1,3\} = \{2,3,1\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$$

(iv) Elemente, die mehrfach in einer Menge genannt werden, verändern die Menge nicht:

$$\{1,2,3\} = \{1,2,3,2\} = \{1,2,3,1,1,1,1,1,1,1,1\}$$

Definition 1.2 (wichtige Zahlenmengen)

$\mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen**

$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,\ldots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen mit Null**

$\mathbb{Z} := \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$ Menge der **ganzen Zahlen**

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ Menge der **rationalen Zahlen** (Brüche)

$\mathbb{R} :=$ Menge der **reellen Zahlen**

$\mathbb{C} :=$ Menge der **komplexen Zahlen** (siehe Kapitel 2)

Bemerkung zur Notation
:= bedeutet „ist definiert als“. Dabei steht das zu definierende Objekt auf der Seite des Doppelpunkts. In obiger Definition werden die links stehenden Symbole für Zahlenmengen eingeführt.

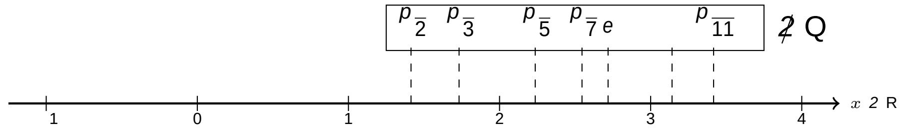
Bemerkungen zu den Zahlenmengen und ihren Rechenoperationen
In den in Definition 1.2 eingeführten Zahlenmengen sind unterschiedliche Rechnoperationen „zugelassen“, deren Ergebnis stets in der betrachteten Zahlenmenge verbleibt.

Addiert man zwei beliebige *natürliche Zahlen* aus $\mathbb{N}_0$ (oder nur $\mathbb{N}$), so ist das Ergebnis stets wieder eine natürliche Zahl. Man schreibt: $a,b \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a+b \in \mathbb{N}_0$. Ferner gilt für die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen: $a,b \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}_0$.
Für die Bildung von Differenzen gilt dies nicht. Zwar ist für $a = 5 \in \mathbb{N}_0$ und $b = 3 \in \mathbb{N}_0$ die Differenz $a - b = 2 \in \mathbb{N}_0$ wieder eine natürliche Zahl, für $a = 3$ und $b = 5$ gilt hingegen $a - b = -2 \notin \mathbb{N}_0$.

In den *ganzen Zahlen* können neben Summen und Produkten auch beliebige Differenzen gebildet werden, ohne die Zahlenmenge zu verlassen: $a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}$.

Für die Bildung von Quotienten ist auch die Menge der ganzen Zahlen nicht ausreichend, um alle Ergebnisse abzudecken. Für die *rationalen Zahlen* gilt hingegen: Der Quotient zweier rationaler Zahlen ist wieder eine rationale Zahl: Für $a \in \mathbb{Q}$ und $0 \neq b \in \mathbb{Q}$ gilt: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Die *reellen Zahlen* beschreiben das Kontinuum des Zahlenstrahls:



In den Zahlen des Zahlenstrahls sind auch solche enthalten, die nicht als Bruch dargestellt werden können. Diese so genannten **irrationalen Zahlen** erhält man z.B. als Lösung von quadratischen Gleichungen der Form $x^2 = p$, wobei p eine beliebige Primzahl ist. Es gilt:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\,, \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\,, \quad \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}\,, \quad \ldots\,, \quad \sqrt{101} \notin \mathbb{Q}\,, \quad \ldots$$

Ferner gibt es in den irrationalen Zahlen so genannte **transzendente Zahlen**, die weder durch Brüche noch durch Wurzeln dargestellt werden können:

$$e \notin \mathbb{Q}\,, \quad \pi \notin \mathbb{Q}\,, \quad \ldots$$

Definition 1.3
Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist (man schreibt $A \subseteq B$). Man sagt dann auch, dass B eine **Obermenge** von A ist (man schreibt $B \supseteq A$).

Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** einer Menge B, wenn A eine Teilmenge von B ist und B mindestens ein Element enthält, das nicht in A enthalten ist (man schreibt $A \subset B$). Man sagt dann auch, dass B eine **echte Obermenge** von A ist (man schreibt $B \supset A$).

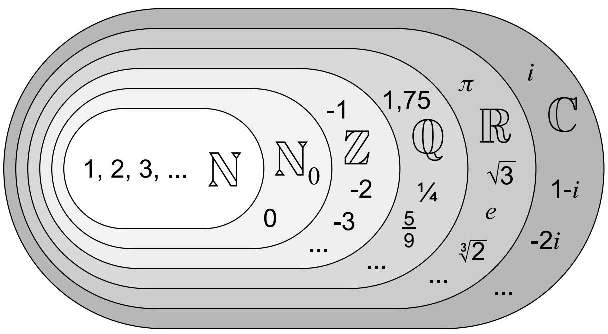
Bemerkungen

- Die Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** (man schreibt $\emptyset$ oder $\{\}$).
- $M \subset N$ gilt genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
- $M = N$ gilt genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.
- Statt der Bezeichnungen $\subseteq$ / $\subset$ wird manchmal auch $\subset$ / $\subsetneq$ verwendet.
  Konvention: In dieser Vorlesung wird durchgehend die erste der beiden Schreibweisen, $\subseteq$ = $\subset$, verwendet.

Beispiel 1.2

(i) Zum vorherigen Beispiel mit der deutschen Sprache D und dem (gedruckten) Wörterbuch W stellt man fest, dass jedes Wort x im Wörterbuch auch ein Wort der deutschen Sprache ist. Daher gilt: Für jedes Element $x \in W$ folgt, dass es auch ein Element in D ist. Man schreibt: $x \in W \Rightarrow x \in D$. Es gibt allerdings Wörter der deutschen Sprache, die in dem Wörterbuch W nicht enthalten sind.
Nach Definition 1.3 ist W demnach eine (echte) Teilmenge von D, d.h. es gilt: $W \subseteq D$ und sogar $W \subset D$. Äquivalent dazu kann man sagen, dass D eine (echte) Obermenge von W ist, d.h. es gilt: $D \supseteq W$ und sogar $D \supset W$.

(ii) Die in Definition 1.2 eingeführten Zahlenmengen bilden eine Serie von (echten) Teilmengen (bzw. Obermengen): $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$:



Beispiel 1.3 Im Folgenden wird die Richtigkeit von fünf mengentheoretischen Aussagen zu drei Beispielen mit je zwei Mengen A und B untersucht.

(i) $A = \{$rot, grün, blau, gelb$\}$, $B = \{$grün, gelb, violett, rosa$\}$

(ii) $A = \{1, 4, 9, 16\}$, $B = \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$

(iii) $A = \{1, 4, 9, 16\}$, $B = \{9, 1, 4, 16, 9, 1, 4\}$

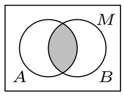
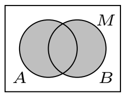
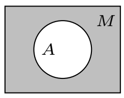
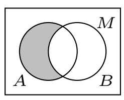
In der nachstehenden Tabelle zeigt ✓ an, dass die Aussage korrekt ist, ✗ zeigt an, dass sie falsch ist:

Beispiel	$A = B$	$A \neq B$	$A \subseteq B$	$A \supseteq B$	$A \in B$
(i)	✗	✓	✗	✗	✗
(ii)	✗	✓	✓	✗	✗
(iii)	✓	✗	✓	✓	✗

Die Aussage $A \in B$ ist in jedem der drei Fälle falsch, da die Menge A stets kein Element (im zweiten und dritten Fall aber Teilmengen) der Menge B ist.

(iv) Für $A = \{1, 2\}$ und $B = \{0, 1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ gilt $A \subseteq B$ und ebenso $A \in B$. Die erste Aussage ist korrekt, da alle Elemente von A (das sind die Zahlen 1 und 2) auch in B enthalten sind, also $A \subseteq B$. Die zweite Aussage ist korrekt, da B als fünftes Element anstelle von weiteren Zahlen eine Menge – eben gerade die Menge A – enthält, also $A \in B$.

Definition 1.4 Seien A und B Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge M.

Name der Operation	**… besteht aus allen Elementen von M, die …**	**Bezeichnung und Mengendarstellung**	**Venn-Diagramm**
Durchschnitt von A und B	in A und in B enthalten sind	$A \cap B :=$ $\{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$	
Vereinigung von A und B	in A oder in B (oder in beiden) enthalten sind	$A \cup B :=$ $\{x \mid x \in A$ oder $x \in B\}$	
Komplement von A (bzgl. M)	nicht in A enthalten sind	$\overline{A} := \{x \in M \mid x \notin A\}$	
Differenz von A und B („A ohne B“)	in A, aber nicht in B enthalten sind	$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ $= A \cap \overline{B}$	

Beispiel 1.4

(i) $\mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N} = \{0\}$, d.h. die Menge, die nur die Null enthält. Dies ist von der leeren Menge $\emptyset$ und der Zahl Null zu unterscheiden: $\{0\} \neq \emptyset \neq 0 \neq \{0\}$.

(ii) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$

Es seien zunächst $A = \{$rot, grün, blau, gelb$\}$ und $B = \{$grün, gelb, violett, rosa$\}$.

(iii) $A \cup B = \{$rot, grün, blau, gelb, violett, rosa$\}$

(iv) $A \cap B = \{\text{grün, gelb}\}$

(v) $\mathbb{N}_0 \cap A = \emptyset$ und $\mathbb{N}_0 \cap B = \emptyset$, da beiden Mengen von Farben und die natürlichen Zahlen kein gemeinsames Element besitzen.

Von nun an seien $A, B, C \subseteq M$ allgemeine Mengen einer gemeinsamen Obermenge M.

(vi) $M \setminus A = \overline{A}$ ist eine alternative Darstellung des Komplements einer Menge A (bzgl. M).

(vii) Es gelten die beiden **De Morganschen Regeln**:

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

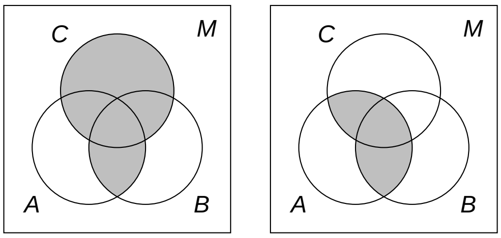
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

(viii) Bei mehreren Durchschnitten gilt Assoziativität: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(ix) Bei mehreren Vereinigungen gilt ebenfalls Assoziativität: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(x) Vorsicht ist geboten bei gemischten Mengenoperationen:

$$(A \cap B) \cup C \quad \neq \quad A \cap (B \cup C)$$



Vielmehr gelten **zwei Distributivgesetze für Mengenoperationen**:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Definition 1.5 Das **kartesische Produkt** der Mengen A und B ist definiert als die Menge aller geordneten Paare (a, b) von Elementen $a \in A$ und $b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}$$

Allgemeiner ist das kartesische Produkt der Mengen $A_1, \dots, A_n$ definiert als

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}\,.$$

Die Elemente $(a_1, \dots, a_n)$ von $A_1 \times \dots \times A_n$ nennt man n-Tupel. Zwei n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_n)$ sind gleich, wenn $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots,\ a_n = b_n$ gilt.
Falls $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ ist, schreibt man abkürzend:

$$A^n := \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ mal}} := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

Beispiel 1.5

(i) Vorsicht: Anders als bei Mengen kommt es bei Tupeln auf die Reihenfolge an, z.B.

$$(3,17) \neq (17,3) \quad \text{im Unterschied zu} \quad \{3,17\} = \{17,3\}$$

(ii) Für $A = \{\text{schwarz, weiß}\}$ und $B = \{\text{Bauer, Läufer, Springer, Turm, Dame, König}\}$ beschreibt die Menge

$$A \times B = \{(\text{schwarz, Bauer}), (\text{weiß, Bauer}), (\text{schwarz, Läufer}), (\text{weiß, Läufer}), (\text{schwarz, Springer}), \dots, (\text{weiß, König})\}$$

alle unterschiedlichen Figuren eines Schachspiels.

(iii) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ kann zur Darstellung von zweidimensionalen Koordinaten verwendet werden, etwa

$$\begin{array}{rl} \text{Startkoordinate} & (1,579;\ 4,392) \\ \text{Zielkoordinate} & (8,389;\ 3.141) \end{array}$$

In diesem Beispiel bietet es sich aufgrund der üblichen Dezimalschreibweise reeller Zahlen an, die Komponenten des 2*-Tupels durch ein Semikolon (;) voneinander abzugrenzen. Alternativ könnte man in der Dezimalschreibweise einen Punkt verwenden:* $(1.579,\ 4.392)$*. Die Notation kann frei gewählt werden, solange sie Mehrdeutigkeiten und Missverständnissen ausschließt.*

(iv) Um die Besucherzahlen der Mensa von Montag bis Freitag zu beschreiben eignet sich die Menge $\mathbb{N}_0^5$. In der ersten Vorlesungswoche des Wintersemesters 2019/20 lag am Donnerstag ein Feiertag, weshalb folgende Wochenstatistik gemessen worden ist:

$$(361, 2840, 3401, 0, 2907) \in \mathbb{N}_0^5$$

Aus der Interpretation der Wochenstatistik ist auch zu erkennen, weshalb bei Tupeln die Reihenfolge zu beachten ist: Bei $(0, 361, 2840, 3401, 2907)$ etwa wäre der Feiertag auf den Montag und nicht auf den Donnerstag gefallen.

1.2 Zahlen

Satz 1.6 (Rechenregeln für die reellen Zahlen)
Für reelle Zahlen ($a, b, c \in \mathbb{R}$) gelten die folgenden Rechengesetze:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (Assoziativität von $+$)
2. $a+b = b+a$ (Kommutativität von $+$)
3. $a+0 = a$ (Existenz des neutralen Elements bzgl. $+$)
4. Zu jedem a gibt es ein Element $-a$, mit $a + -a = 0$ (Existenz inverser Elemente bzgl. $+$)
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativität von $\cdot$)
6. $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität von $\cdot$)
7. $a \cdot 1 = a$ (Existenz des neutralen Elements bzgl. $\cdot$)
8. Zu jedem $a \neq 0$ gibt es ein Element a^{-1}, mit $a \cdot a^{-1} = 1$ (Existenz inverser Elemente bzgl. $\cdot$)
9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Definition 1.7

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu $a \in \mathbb{R}$ ist die ***n*-te Potenz** a^n von a definiert als das n-fache Produkt von a mit sich selbst:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}.$$

Man nennt a die **Basis** und n den **Exponenten** der Potenz a^n.
Für $a \neq 0$ ist $\quad a^0 := 1 \quad$ und $\quad a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine reelle Zahl $a \geq 0$ ist

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a},$$

die ***n*-te Wurzel** von a, d.h. $a^{\frac{1}{n}}$ ist definiert als die nicht-negative Lösung x der Gleichung $x^n = a$.

Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $a > 0$ ist
$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$$

<u>Bemerkung</u>
Die Gleichung $x^2 = a$ besitzt im Allgemeinen zwei Lösungen: $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$ (für $a \geq 0$).
Die *Wurzel* selbst ist dabei stets als *nicht-negative Zahl* definiert: $\sqrt{a} \geq 0$ für alle $a \geq 0$.
Diese Konvention überträgt sich auf n-te Wurzeln: Schreibt man $x = \sqrt[n]{a}$ (für $a \geq 0$), so meint man damit die (eindeutig bestimmte) nicht-negative reelle Zahl x mit der Eigenschaft, dass $x^n = a$ gilt.

Satz 1.8 (Potenzgesetze)
Es gilt für alle a, b, p, q, für die die folgenden Potenzen definiert sind:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
3. $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
4. $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$
5. $(a^p)^q = (a^q)^p = a^{p \cdot q}$

<u>Begründungen zu den Potenzgesetzen</u>

ad 1. $a^p \cdot a^q = \underbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{p\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{q\text{-mal}}}_{(p+q)\text{-mal}} = a^{p+q}$.

ad 2. Es gilt:

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a \cdot \ldots \cdot a \quad [p\text{-mal im Zähler}]}{a \cdot \ldots \cdot a \quad [q\text{-mal im Nenner}]} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } p = q: & 1 \\ \text{für } p > q: & a \cdot \ldots \cdot a \quad [(p-q)\text{-mal}] \\ \text{für } p < q: & \dfrac{1}{a \cdot \ldots \cdot a \quad [(q-p)\text{-mal}]} \end{array} \right\} = a^{p-q}.$$

ad 3. $a^p \cdot b^p = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{p\text{-mal}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot a}_{p\text{-mal}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{p\text{-mal}} = (a \cdot b)^p$.

ad 4. Es gilt:

$$\frac{a^p}{b^p} = \frac{a \ \dots \ a \quad [p\text{-mal im Zähler}]}{b \ \dots \ b \quad [p\text{-mal im Nenner}]} = \underbrace{\frac{a}{b} \ \dots \ \frac{a}{b}}_{p\text{-mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^p .$$

ad 5. $(a^p)^q = \underbrace{\underbrace{(a^p)}_{p\text{-mal}} \ \dots \ (a^p)}_{q\text{-mal}} = a^{p\,q} = (a^q)^p$.

Definition 1.9
Für reelle Zahlen $a, b > 0, b \neq 1$ ist der **Logarithmus von a zur Basis b**, $\log_b a$ definiert als die Lösung x der Gleichung $a = b^x$.

Spezielle Logarithmen

Dekadischer Logarithmus zur Basis 10: $\lg a := \log a := \log_{10} a$

Natürlicher Logarithmus zur Basis e: $\ln a := \log_e a$

Beispiel 1.6 Für die nachstehenden Beispiele wird direkt die Definition des Logarithmus angewandt: $a = b^x \quad , \quad x = \log_b a$:

(i) $25 = 5^x \quad , \quad x = \log_5 25 = 2$

(ii) $27 = 3^x \quad , \quad x = \log_3 27 = 3$

(iii) $1000 = 10^x \quad , \quad x = \log_{10} 1000 = \lg 1000 = \log 1000 = 3$ (synonyme Notationen)

Im Folgenden werden Ausdrücke der Form $b^{\log_b a} = ?$ untersucht:

(iv) $10^{\log_{10} 42} = 42$, denn der Exponent $x = \log_{10} 42$ ist laut Definition Lösung der Gleichung $10^x = 42$. Dieser Exponent x bildet mit der Basis 10 die Potenz $10^x = 42$.

(v) Dieses Argument gilt allgemein, sodass stets $b^{\log_b a} = a$ gilt.

Satz 1.10 (Logarithmusgesetze)
Es gilt für alle a, b, c, d, q, für die folgende Logarithmen definiert sind:

1. $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$
2. $\log_b(c \ \ d) = \log_b c + \log_b d$
3. $\log_b(\frac{c}{d}) = \log_b c \quad \log_b d$
4. $\log_b(c^q) = q \ \ \log_b c$
5. $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Begründungen zu den Logarithmusgesetze

ad 1. Es gilt $b^0 = 1$ sowie $b^1 = b$ für alle Basen $b > 0$. Damit folgt aus der Definition des Logarithmus $\log_b 1 = 0$ sowie $\log_b b = 1$.

ad 2. Betrachte $x = \log_b(c \cdot d)$. Nach Definition des Logarithmus gilt also $b^x = c \cdot d$. Führe nun die beiden Bezeichnungen $y = \log_b c$ und $z = \log_b d$ ein, d.h. $b^y = c$ und $b^z = d$. Dies ergibt nach den Potenzgesetzen:

$$b^x = c \cdot d = b^y \cdot b^z = b^{y+z} \; .$$

Daraus folgt $x = y + z$, oder ohne abkürzende Bezeichnungen: $\log_b(c \cdot d) = \log_b c + \log_b d$.

ad 3. Betrachte $x = \log_b(\frac{c}{d})$. Nach Definition des Logarithmus gilt also $b^x = \frac{c}{d}$. Führe nun die beiden Bezeichnungen $y = \log_b c$ und $z = \log_b d$ ein, d.h. $b^y = c$ und $b^z = d$. Dies ergibt nach den Potenzgesetzen:

$$b^x = \frac{c}{d} = \frac{b^y}{b^z} = b^{y-z} \; .$$

Daraus folgt $x = y - z$, oder ohne abkürzende Bezeichnungen: $\log_b(\frac{c}{d}) = \log_b c - \log_b d$.

ad 4. Betrachte $x = \log_b(c^q)$. Nach Definition des Logarithmus gilt also $b^x = c^q$. Führe nun die Bezeichnung $z = \log_b c$ ein, d.h. $b^z = c$. Dies ergibt nach den Potenzgesetzen:

$$b^x = c^q = (b^z)^q = b^{z \cdot q} \; .$$

Daraus folgt $x = z \cdot q$, oder ohne abkürzende Bezeichnungen: $\log_b(c^q) = q \cdot \log_b c$.

ad 5. Im ersten Schritt ist die Identität $a = b^{\log_b a}$ hilfreich. Betrachte für eine beliebige Basis c:

$$\log_c a = \log_c \left(b^{\log_b a} \right)$$

Weiter findet die eben begründete 4. Rechenregel Anwendung:

$$\log_c a = \log_c \left(b^{\log_b a} \right) \overset{4.}{=} \log_b a \cdot \log_c b$$

Daraus ergibt sich durch Division:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Beispiel 1.7

(i) $\log(5 \cdot 20) = \log 5 + \log 20 = 0,69897\ldots + 1,30103\ldots = 2$.
oder direkt (d.h. ohne Anwendung der Logarithmusgesetze): $\log(5 \cdot 20) = \log 100 = 2$.

(ii) $\ln e^5 = 5 \cdot \ln e = 5$.
oder direkt (d.h. ohne Anwendung der Logarithmusgesetze): $\ln(e^5) = \ln 148,41\ldots = 5$.

(iii) Ein Logarithmus zur Basis 3 kann durch den dekadischen Logarithmus ausgedrückt werden:

$$\log_3 177.147 = \frac{\log 177.147}{\log 3} = \frac{5,2483\ldots}{0,4771\ldots} = 11$$

Alternativ ergibt sich aus der Darstellung durch den natürlichen Logarithmus:

$$\log_3 177.147 = \frac{\ln 177.147}{\ln 3} = \frac{12,0847\ldots}{1,0986\ldots} = 11$$

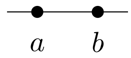
(iv) Im Umfeld von IT, Programmierung etc. benötigt man zuweilen:

$$\log_2 1.024 = \frac{\ln 1.024}{\ln 2} = \frac{6,9314\ldots}{0,6931\ldots} = 10$$

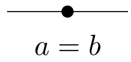
<u>**Anordnung reeller Zahlen**</u>

Die reellen Zahlen sind angeordnet, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der nachstehenden drei Fälle:

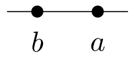
$a < b \quad (\Leftrightarrow \; b - a > 0)$



$a = b \quad (\Leftrightarrow \; b - a = 0)$



$a > b \quad (\Leftrightarrow \; b - a < 0)$



<u>Bemerkung</u>

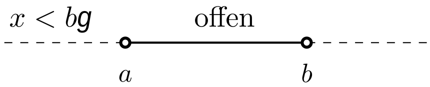
Für den Fall, dass $a < b$ oder $a = b$ gilt, schreibt man $a \leq b$.

Für den Fall, dass $a > b$ oder $a = b$ gilt, schreibt man $a \geq b$.

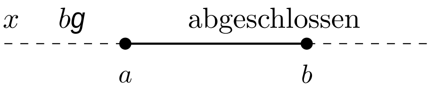
Definition 1.11

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann sind die **beschränkten Intervalle** mit Randpunkten a, b definiert wie folgt:

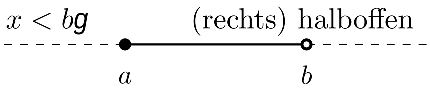
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



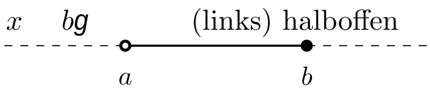
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

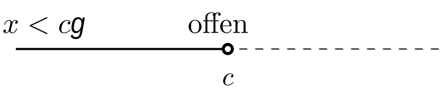


$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

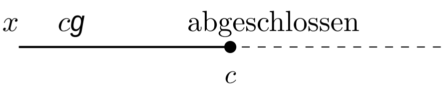


Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die **unbeschränkten Intervalle** mit Randpunkt c definiert wie folgt:

$(-\infty, c) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$



$(-\infty, c] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$



Analog werden die Intervalle (c, ∞) und $[c, \infty)$ definiert.

Bemerkung

Anstelle der runden Klammern zur Darstellung von nicht eingeschlossenen Randpunkten werden auch abgewandte eckige Klammern verwendet. Zum Beispiel ist statt der Schreibweise (a,b) auch $]a,b[$ gebräuchlich.

Beispiel 1.8

(i) $[0,2] \cup [2,4] \cup [4,6] = [0,6]$

(ii) $[0,2] \cap [2,4] \cap [4,6] = \{2\} \cap [4,6] = \emptyset$ bzw.

$[0,2] \cap [2,4] \cap [4,6] = [0,2] \cap \{4\} = \emptyset$

(iii) $[1,5] \cap [0,4] = [1,4]$

(iv) $(1,5) \cap (0,4) = (1,4)$

(v) $[1,5] \cap (0,4) = [1,4)$

(vi) $(1,5) \cap [0,4] = (1,4]$

Die nachstehenden Komplemente beziehen sich stets auf die Obermenge $M = [0,10]$:

(vii) Für $A = [0,5]$ gilt: $\overline{A} = (5,10]$

(viii) Für $A = (0,5)$ gilt: $\overline{A} = \{0\} \cup [5,10]$

(ix) Welche Menge ist $\overline{B \setminus C}$ für $B = \{x \mid x = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}\}$ und $C = [\pi, \infty)$?
Die Menge B enthält alle geraden Zahlen beginnend mit der 2, also $B = \{2,4,6,8,10,\ldots\}$.
Da $\pi \approx 3,1415 > 3$ gilt, folgt $B \setminus C = \{2\}$. Damit: $\overline{B \setminus C} = M \setminus \{2\} = [0,2) \cup (2,10]$.

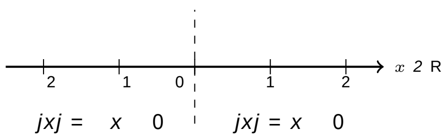
(x) Welche Menge ist $\overline{B^* \setminus C}$ für $B^* = \{x \mid x = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0\}$ und $C = [\pi, \infty)$?
Die Menge B^* enthält nun zusätzlich die Zahl Null, also $B^* = \{0,2,4,6,8,10,\ldots\}$, weshalb $B^* \setminus C = \{0,2\}$ folgt. Damit: $\overline{B^* \setminus C} = M \setminus \{0,2\} = (0,2) \cup (2,10]$.

Definition 1.12 Unter dem **(Absolut-)Betrag** einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ versteht man:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

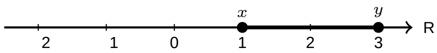
Bemerkung

In der Definition des Betrages werden nicht-negative ($x \geq 0$) sowie negative reelle Zahlen ($x < 0$) durch eine Fallunterscheidung getrennt behandelt:



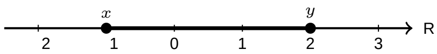
Für zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ entspricht $|x - y|$ dem Abstand von x und y:

(1) Zwei positive Zahlen:



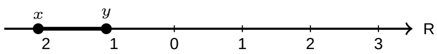
$x = 1, y = 3 \Rightarrow |1 - 3| = |3 - 1| = 2$

(2) Eine positive, eine negative Zahl:



$x = -1, y = 2 \Rightarrow |(-1) - 2| = |2 - (-1)| = 3$

(3) Zwei negative Zahlen:



$x = -2, y = -1 \Rightarrow |(-2) - (-1)| = |(-1) - (-2)| = 1$

Satz 1.13 Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $|x| = |-x|$
2. $|x| \geq 0$
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung**)

Bemerkung

Wegen der zweiten und dritten Eigenschaft ($|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$), nennt man den (Absolut-)Betrag **positiv definit**.

In der Dreiecksungleichung gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn x und y das gleiche Vorzeichen besitzen, z.B.

$x = 1, y = 3 \Rightarrow |x + y| = 4 = |x| + |y|$, oder

$x = -2, y = -1 \Rightarrow |x + y| = 3 = |x| + |y|$.

In der Dreiecksungleichung gilt die echte Ungleichung genau dann, wenn x und y unterschiedliche Vorzeichen besitzen, z.B.

$x = -1, y = 2 \Rightarrow |x + y| = 1 < |x| + |y| = 3$.

Die linke Seite der Dreiecksungleichung verschwindet genau dann, wenn $x = -y$ gilt. Für diesen Fall ergibt sich: $|x + y| = 0 \leq 2|x|$.

Summenzeichen

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ kann man die Summe der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ abkürzend mit Hilfe des **Summenzeichens Σ** schreiben:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \ .$$

Der Index i heißt **Summationsindex**, welcher frei gewählt werden kann (z.B. auch k):

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k \ .$$

Wichtige Summenformeln

Gaußsche (arithmetische) Summenformel: $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$

Geometrische Summenformel: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 \quad q^{n+1}}{1 \quad q}$

Beispiel 1.9

(i) Die Summe der ersten N geraden Zahlen:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2N = \sum_{k=1}^{N} 2k = 2 \sum_{k=1}^{N} k = 2 \quad \frac{N(N+1)}{2} = N(N+1)$$

(ii) Die Summe der ersten N ungeraden Zahlen (mit dieser Parametrisierung ist 1 die erste ungerade Zahl für $k = 1$):

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2N \quad 1) = \sum_{k=1}^{N} (2k \quad 1) = 2 \sum_{k=1}^{N} k \quad \sum_{k=1}^{N} 1 = 2 \quad \frac{N(N+1)}{2} \quad N = N^2$$

Produktzeichen
Für m, n 2 Z mit $m \quad n$ kann man das Produkt der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ abkürzend mit Hilfe des **Produktzeichens** $\prod$ schreiben:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \quad a_{m+1} \quad \ldots \quad a_n \ .$$

Bemerkungen

Auch bei der Produktbildung ist der Index i frei wählbar, d.h. $\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{k=m}^{n} a_k$.

Das spezielle Produkt der ersten n natürlichen Zahlen bezeichnet man als **Fakultät**:

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n \ .$$

Hierbei wird $0! := 1$ definiert (leeres Produkt).

Beispiel 1.10

(i) Die wiederholte Anwendung des Potenzgesetzes $e^{x+y} = e^x \quad e^y$ ergibt:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \exp(x_1) \quad \exp(x_2) \quad \ldots \quad \exp(x_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp(x_k)$$

(ii) Die wiederholte Anwendung des Logarithmusgesetzes $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ ergibt:

$$\log\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \log(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log(x_1) + \log(x_2) + \ldots + \log(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \log(x_k)$$

(iii) Bei Fakultäten wird das Ergebnis sehr schnell sehr groß:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6\,, \qquad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24\,, \qquad 10! = \prod_{k=1}^{10} k = 3.628.800$$

(iv) Es gilt allgemein für $n \in \mathbb{N}_0$: $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

(v) Quotienten von Fakultäten lassen sich oftmals durch Kürzen sehr stark vereinfachen:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

(vi) Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n > m$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{m!} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} \\ &= (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=m+1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n-m} (m+k) \end{aligned}$$

Gleichungen

Folgende Umformungen ändern die Lösungsmenge einer Gleichung nicht:

- Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation beider Seiten mit oder Division beider Seiten durch einen von Null verschiedenen Term
- Anwenden einer umkehrbaren Funktion auf beide Seiten

Beispiel 1.11

(i) Die Gleichung $\frac{15}{x} - 12 = 42$ soll nach $x \neq 0$ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{15}{x} + 12 &= 42 && | -12 \\ \frac{15}{x} &= 30 && | :15 \\ \frac{1}{x} &= 2 && | \text{ Invertieren durch Anwenden der Funktion } \tfrac{1}{(\,)} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) Es soll die allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung ($a \neq 0$) gefunden werden:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && | : a \neq 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && | \text{ quadratische Ergänzung auf der linken Seite} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 && | + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} && | \text{ Anwendung } \pm\sqrt{(\,)} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} && | -\frac{b}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt die Lösung(en):

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$ bestimmt die Anzahl reeller Lösungen:

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = 0$: eine (doppelte) reelle Lösung
- $D < 0$: keine reelle Lösung

Ungleichungen

Folgende Umformungen ändern die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht:

- Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Ungleichung
- Multiplikation von beiden Seiten der Ungleichung mit oder Division von beiden Seiten der Ungleichung durch einen positiven Term
- Anwenden einer streng monoton steigenden Funktion auf beide Seiten der Ungleichung

Folgende Umformungen kehren die Ordnungsrelation um:

- Multiplikation von beiden Seiten der Ungleichung mit oder Division von beiden Seiten der Ungleichung durch einen negativen Term
- Anwenden einer streng monoton fallenden Funktion auf beide Seiten der Ungleichung

Beispiel 1.12

(i) Es sollen alle $x \in \mathbb{R}$ gefunden werden, welche die Ungleichung $22 - 10x \leq 42$ erfüllen:

$$\begin{aligned} 22 - 10x &\leq 42 && \mid -22 \\ -10x &\leq 20 && \mid :(-10) \quad \Rightarrow \text{ Ordnungsrelation dreht sich um} \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

(ii) Es sollen alle $x > 0$ gefunden werden, welche die Ungleichung $\frac{15}{x} + 12 \leq 42$ erfüllen:

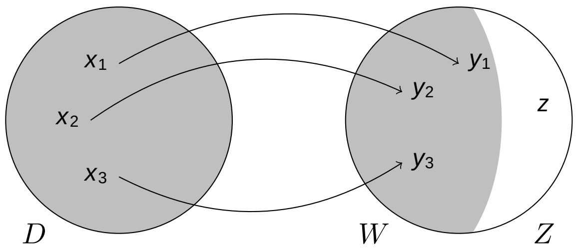
$$\begin{aligned} \tfrac{15}{x} + 12 &\leq 42 && \mid -12 \\ \tfrac{15}{x} &\leq 30 && \mid :15 \\ \tfrac{1}{x} &\leq 2 && \mid \text{Im positiven Bereich ist die Funktion } \tfrac{1}{(\,)} \text{ streng monoton fallend} \\ & && \quad \Rightarrow \text{ Ordnungsrelation dreht sich um} \\ x &\geq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $x < 0$ ist die Ungleichung jederzeit erfüllt da: $\frac{15}{x} + 12 < 0 + 12 = 12 \leq 42$.

1.3 Funktionen

Definition 1.14 Eine **Funktion** (Abbildung) f ist eine Vorschrift, die jedem Element x einer **Definitionsmenge** D genau ein Element y einer **Zielmenge** Z zuordnet.

Schreibweise: $\begin{aligned} f: \ & D \to Z \\ & x \mapsto y \end{aligned}$ oder: $y = f(x), \quad x \in D$



Bemerkungen

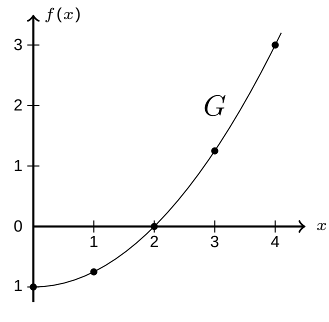
- x ist das **Funktionsargument**, die **unabhängige Variable**
- y ist der **Funktionswert**, die **abhängige Variable**
- $y = f(x)$ ist die **Funktionsgleichung**
- $W := \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq Z$ heißt **Wertemenge**
- $G := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times Z$ heißt **(Funktions-)Graph**
- Eine **reelle Funktion** (einer Veränderlichen) ist eine Funktion

$$f : D \to Z \quad \text{mit} \quad D \subseteq \mathbb{R} \text{ und } Z \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 1.13 Betrachte die reelle Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 4)$.

$$\Rightarrow \text{Wertemenge } W = \{f(x) \mid x \in D\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = y \text{ für ein } x \in [0, \infty)\}$$
$$= [-1, \infty)$$

Es gilt: $(-\infty, -1) \notin W$, denn löst man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auf, so erhält man den Ausdruck $x = 2\sqrt{y+1}$, der nur für $y \geq -1$ definiert ist.
Für den Graphen $G = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}$ erhält man:



Der Graph G enthält alle Paare $(x, f(x))$, die durch die Funktion f beschrieben werden. Mit den beispielhaften Elementen $\{(0, -1), (1, -\frac{3}{4}), (2, 0), (3, \frac{5}{4}), (4, 3)\} \subset G$.

Definition 1.15 Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ heißt

monoton steigend (bzw. fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2))$$

streng monoton steigend (bzw. fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2))$$

nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) \leq C \quad (\text{bzw. } f(x) \geq C)$$

periodisch mit der Periode $p > 0$, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x + p) = f(x)$$

gerade oder **achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse**, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

ungerade oder **punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs**, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Beispiel 1.14 Betrachte die sechs nachstehenden Funktionen:

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$

$f_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$

$f_3 : [-2, 2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$

$f_4 : [-2, 0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$

$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min\{u \in \mathbb{Z} \mid u \geq x\}$
(Aufrunden auf die nächste ganze Zahl)

$f_6 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 + x$

In der nachstehenden Tabelle zeigt ✓ an, dass die Aussage korrekt ist, ✗ zeigt an, dass sie falsch ist. Darüber hinaus zeigt n/a an, dass die Eigenschaft für diese Funktion nicht definiert ist:

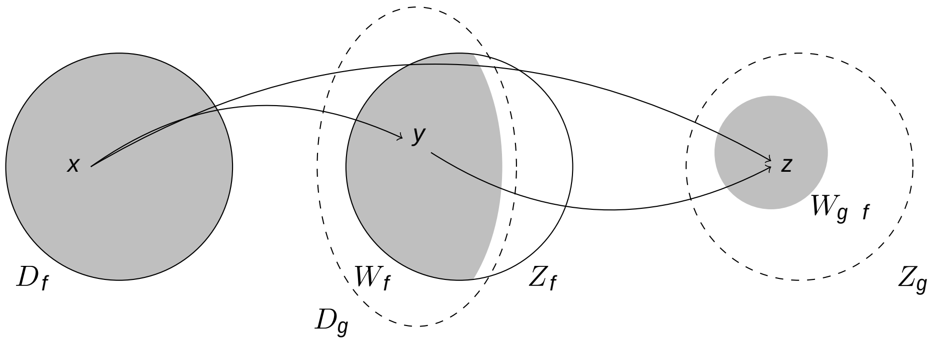
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
monoton steigend	✗	✓	✗	✗	✓	✓
streng monoton steigend	✗	✗	✗	✓	✗	✗
monoton fallend	✗	✓	✗	✗	✗	✓
streng monoton fallend	✗	✗	✗	✓	✗	✗
nach oben beschränkt	✗	✓	✓	✓	✗	✓
nach unten beschränkt	✓	✓	✓	✓	✗	✓
periodisch	✗	✗	✗	✗	✗	✗
gerade/achsensymmetrisch	✓	n/a	✓	n/a	✗	✗
ungerade/punktsymmetrisch	✗	n/a	✗	n/a	✗	✓

Bemerkung
Die Funktionen f_1 bis f_4 unterscheiden sich nicht in ihrer Abbildungsvorschrift sondern nur in ihrer Definitionsmenge. Es ist daher wesentlich, zu einer Funktion neben der Abbildungsvorschrift ebenso die Definitionsmenge D sowie die Zielmenge Z anzugeben und zu berücksichtigen.

Definition 1.16

Seien $f : D_f \to Z_f$ und $g : D_g \to Z_g$ Funktionen mit der Eigenschaft, dass die Wertemenge W_f von f eine Teilmenge von D_g ist: $W_f \subseteq D_g$. Dann ist die **Verkettung** bzw. **Hintereinanderausführung** von g und f (sprich „g nach f“) definiert als

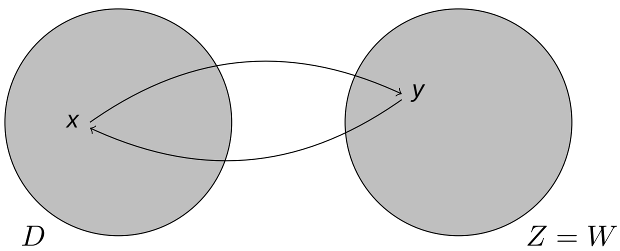
$$\begin{aligned} g \circ f : \quad D_f &\to Z_g \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$



Eine Funktion $f : D \to W$ heißt **umkehrbar**, wenn es eine Funktion $g : W \to D$ auf der Wertemenge W von f gibt, so dass

$$(g \circ f)(x) = x \text{ für alle } x \in D.$$

Die Funktion g wird dann **Umkehrfunktion** von f genannt und mit $f^{-1} := g$ bezeichnet.



Bemerkung

Betrachtet man $(g \circ f)(x) = x$ direkt auf der Ebene der Funktionen, so nutzt man auch die **Identitätsfunktion**: $g \circ f = \mathrm{id}$. Diese gibt stets das erhaltene Argument zurück: $\mathrm{id}(x) = x$.

Beispiel 1.15 Betrachte zunächst Beispiele zur Verkettung von Funktionen:

(i) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 2y - 3$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) &= 2f(x) - 3 \\ &= 2(x^2 + 1) - 3 \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(y) = f(g(y)) &= g(y)^2 + 1 \\ &= (2y - 3)^2 + 1 \\ &= 4y^2 - 12y + 10 \end{aligned}$$

(ii) Es ist üblich, die Variablen von f und g gleich zu benennen: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) &= f(x)^2 - 1 \\
&= \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1 \\
&= x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) &= \sqrt{g(x)^2+1} \\
&= \sqrt{(x^2-1)^2+1} \\
&= \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}
\end{aligned}$$

(iii) Betrachte nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ und $g : [\frac{1}{4}, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = \sqrt{4x-1}$.
Die Definitionsmenge von g, $D_g = [\frac{1}{4}, \infty)$, bildet eine Obermenge der Wertemenge von f, $W_f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [1, \infty) \subseteq D_g$, weshalb $g \circ f$ wohldefiniert ist:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) &= \sqrt{4f(x)-1} \\
&= \sqrt{4\left(\tfrac{1}{2}x^2+1\right) - 1} \\
&= \sqrt{2x^2+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f \circ g : [\tfrac{1}{4}, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) &= \frac{1}{2}g(x)^2 + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x-1}\right)^2 + 1 \\
&= 2x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Betrachte nun Beispiele mit Fokus auf Umkehrfunktionen:

(iv) Zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 8$ ist die Umkehrfunktion f^{-1} gesucht:

$$\begin{aligned}
& y = 2x + 8 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{y}{2} - 4
\end{aligned}$$

Mit der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{2} - 4$ folgt damit:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{2} - 4 = \frac{1}{2}(2x+8) - 4 = x\,,$$

womit $f^{-1} = g$ folgt.

(v) Nun ist für $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ die Umkehrfunktion f^{-1} gesucht:

$$\begin{aligned}
& y = \frac{2}{x-1} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{2}{y} + 1
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Umkehrfunktion zu $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x} + 1$.

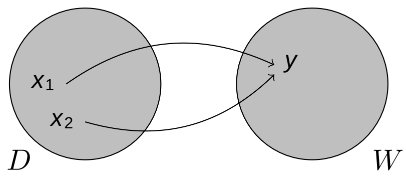
Allgemeine Bemerkungen zu Funktionen

Funktionen können in unterschiedlicher Weise dargestellt werden. Möglich ist u.a. eine tabellarische, graphische oder analytische sowie eine explizite oder implizite Darstellung.

Beachte: Im Allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$.

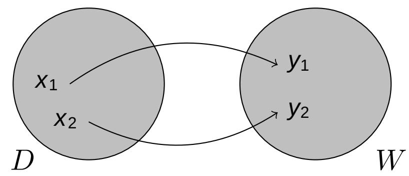
$f : D \to W$ ist genau dann umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt.

Skizze einer **nicht-umkehrbaren** Funktion



z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^2$

Skizze einer **umkehrbaren** Funktion



z.B. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^2$

Zeichnerisch erhält man den Graphen der Umkehrfunktion einer reellen Funktion f durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.

Wenn $f : D \to W$ streng monoton ist und W gleich der Wertemenge von f ist, dann ist f umkehrbar.

Definition 1.17 Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} p : \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienen $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Für den **Grad** n von p schreibt man auch $\deg(p)$ oder $\mathrm{grad}(p)$. Ein Polynom heißt **normiert**, wenn $a_n = 1$ ist.

Bemerkungen

Zu $n+1$ verschiedenen Wertepaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ gibt es genau ein Polynom p vom Grad $\leq n$ mit $p(x_i) = y_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$.

Koeffizientenvergleich: Zwei Polynome p und q mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

sind genau dann gleich, wenn $n = m$ (d.h. ihr Grad gleich ist) und $a_i = b_i$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$ gilt. Man schreibt dann: $p = q$.

Sei p ein Polynom n-ten Grades und x_0 eine Nullstelle von p. Dann gibt es ein Polynom q vom Grad $n-1$, so dass $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Jedes Polynom n-ten Grades besitzt in $\mathbb{R}$ höchstens n Nullstellen.
Hinweis: Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass das Polynom genau n komplexe Nullstellen besitzt (siehe Satz 2.8 im nächstes Kapitel).

Beispiel 1.16

(i) **Interpolation durch Polynome** Gesucht ist ein Polynom zweiten Grades (Parabel), das genau durch drei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ geht, z.B. $(0, -4), (1, -2), (2, 4)$. Der allgemeine Ansatz $p(x) = ax^2 + bx + c$ führt zu drei Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & 0 + 0 + c \overset{!}{=} -4 \\ \text{II)} \quad & a + b - 4 \overset{!}{=} -2 \quad \Rightarrow \quad b = 2 - a \\ \text{III)} \quad & 4a + 2b - 4 = 4a + 2(2 - a) - 4 \overset{!}{=} 4 \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung erhält man $a = 2$, woraus $b = 0$ folgt; $c = -4$ war bereits durch die erste Gleichung festgelegt. Insgesamt ergibt sich das gesuchte Polynom zu $p(x) = 2x^2 - 4$. Für dieses gilt wie gefordert: $p(0) = -4$, $p(1) = -2$ und $p(2) = 4$.

(ii) **Polynomdivision** Für ein Polynom p mit $\deg(p) = n$ und eine Nullstelle x_0 mit $p(x_0) = 0$ soll ein Polynom $q(x)$ gefunden werden, sodass gilt:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - x_0)$$

Betrachte hierzu das Beispiel $p_1(x) = x^2 + 3x - 10$ mit einer Nullstelle $x_0 = -5$:

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^2 + 3x - 10\big) : \big(x + 5\big) = x - 2 \\ -x^2 - 5x \\ \hline \qquad -2x - 10 \\ \qquad\ \ 2x + 10 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Als weiteres Beispiel betrachte $p_2(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ mit einer Nullstelle $x_0 = 2$:

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^3 - 10x^2 + 31x - 30\big) : \big(x - 2\big) = x^2 - 8x + 15 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline \qquad -8x^2 + 31x \\ \qquad\ \ 8x^2 - 16x \\ \hline \qquad\qquad 15x - 30 \\ \qquad\quad -15x + 30 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Definition 1.18 Eine Funktion f, die man als Quotient von zwei Polynomen p und q darstellen kann, heißt **gebrochenrationale Funktion**:

$$\begin{aligned} f : \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

Falls $\deg(p) < \deg(q)$, dann nennt man f **echt gebrochenrational**, sonst **unecht gebrochenrational**.

Bemerkungen

Jede unecht gebrochenrationale Funktion f lässt sich durch Polynomdivision schreiben als $f = a + r$, wobei a ein Polynom und r eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Das Polynom a wird auch **Asymptote** von f genannt.

Jede echt gebrochenrationale Funktion f lässt sich durch **Partialbruchzerlegung** als Summe von gebrochenrationalen Funktionen mit möglichst kleinem Grad der Nennerpolynome schreiben.

Schritt 1 Bestimmung aller Nullstellen $x_i \in \mathbb{R}$ des Nennerpolynoms $q(x)$. Im günstigsten Fall zerfällt q in n Linearfaktoren:

$$q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Treten Nullstellen x_i mehrfach (k-fach) auf, so können diese zu Faktoren $(x - x_i)^k$ zusammengefasst werden. Lässt sich ein Polynom in den reellen Zahlen nicht weiter in Linearfaktoren zerlegen, so bleibt es im Gesamten stehen. Beispielsweise besitzt das nachstehende (Nenner-) Polynom q_0 die einfache Nullstelle $x_1 = 1$, die doppelte Nullstelle $x_2 = 2$, darüber hinaus aber keine weiteren reellen Nullstellen:

$$q_0(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 4 = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x^2 + 1)$$

An diese Stelle ist zu prüfen, ob der Zähler gemeinsame Faktoren besitzt, d.h. ob das Polynom $p(x)$ im Zähler über identische Nullstellen verfügt, die gekürzt werden können. Dies führt zu einem deutlich reduzierten Aufwand für die nachstehenden Schritte. Beispielsweise für

$$p_0(x) = 50x^4 + 100$$

ist dies nicht der Fall, sodass keine Faktoren in $p_0(x)/q_0(x)$ gekürzt werden können.

Schritt 2 Aufstellen eines Ansatzes für die Partialbruchzerlegung. Für jede Nullstelle x_i des Nennerpolynoms, die k-fach auftritt, wird folgende Summe angesetzt:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_{i;j}}{(x - x_i)^j} = \begin{cases} \dfrac{A_{i;1}}{x - x_i} & \text{für eine einfache Nullstelle } x_i \ (k = 1) \\ \dfrac{A_{i;1}}{x - x_i} + \dfrac{A_{i;2}}{(x - x_i)^2} & \text{für eine doppelte Nullstelle } x_i \ (k = 2) \\ \dfrac{A_{i;1}}{x - x_i} + \dfrac{A_{i;2}}{(x - x_i)^2} + \dfrac{A_{i;3}}{(x - x_i)^3} & \text{für eine dreifache Nullstelle } x_i \ (k = 3) \\ \ldots & \ldots \\ \dfrac{A_{i;1}}{x - x_i} + \ldots + \dfrac{A_{i;k}}{(x - x_k)^k} & \text{für eine } k-\text{fache Nullstelle } x_i \end{cases}$$

Für jeden quadratischen Faktor $a_i x^2 + b_i x + c_i$ des Nennerpolynoms, der keine reellen Nullstellen besitzt, wird für die Partialbruchzerlegung im Zähler ein allgemeines lineares Polynom angesetzt:

$$\frac{B_i x + C_i}{a_i x^2 + b_i x + c}$$

Die Koeffizienten im Zähler, $A_{i;j}, B_i, C_i \in \mathbb{R}$, sind noch unbekannt und müssen im Folgenden bestimmt werden. Für das obige Beispiel ergibt sich also folgender Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p_0(x)}{q_0(x)} \overset{!}{=} \frac{A_{1;1}}{x - 1} + \frac{A_{2;1}}{x - 2} + \frac{A_{2;2}}{(x - 2)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + 1}$$

Schritt 3 Zur besseren Lesbarkeit und Handhabung werden die fünf Unbekannten in A, B, C, D, E umbenannt. Anschließend wird der Ansatz auf den Hauptnenner erweitert, der (per Konstruktion) das Nennerpolynom $q_0(x)$ ist:

$$\begin{aligned}
\frac{p_0(x)}{q_0(x)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x-2)^2(x^2+1) + B(x-1)(x-2)(x^2+2) + C(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)(x-2)^2}{q_0(x)}
\end{aligned}$$

Schritt 4 Damit die Gleichheit für die gesamte echt gebrochenrationale Funktion gilt, muss der Zähler identisch zu $p(x)$ sein. Multipliziert man alles aus und ordnet das entstehende Polynom nach Potenzen von x, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p_0(x) = {} & 50x^4 + 100 \\
\overset{!}{=} {} & (A+B+D)x^4 + (-4A-3B+C-5D+E)x^3 + (5A+3B-C+8D-5E)x^2 \\
& + (-4A-3B+C-4D+8E)x + (4A+2B-C-4E)
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt zu einem Gleichungssystem mit fünf Unbekannten:

$$\begin{aligned}
\text{I)} \quad & A+B+D \overset{!}{=} 50 \\
\text{II)} \quad & -4A-3B+C-5D+E \overset{!}{=} 0 \\
\text{III)} \quad & 5A+3B-C+8D-5E \overset{!}{=} 0 \\
\text{IV)} \quad & -4A-3B+C-4D+8E \overset{!}{=} 0 \\
\text{V)} \quad & 4A+2B-C-4E \overset{!}{=} 100
\end{aligned}$$

Schritt 5 Das angegebene Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung (hier nur das Ergebnis):

$$A = 75, \quad B = -4, \quad C = 180, \quad D = -21, \quad E = 3$$

Damit ergibt sich insgesamt für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{50x^4+100}{x^5-5x^4+9x^3-9x^2+8x-4} = \frac{75}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{180}{(x-2)^2} + \frac{3-21x}{x^2+1}$$

Beispiel 1.17

(i) Die unecht gebrochenrationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{2x^5 - x^2 + 3x + 1}{x^2+1}$ kann in eine Asymptote und echt gebrochenrationale Funktion zerlegt werden:

$$\begin{array}{l}
\big(2x^5 \qquad\quad - x^2 + 3x + 1\big) : \big(x^2+1\big) = 2x^3 - 2x - 1 + \dfrac{5x+2}{x^2+1} \\
\underline{-2x^5 - 2x^3} \\
\qquad\quad -2x^3 - x^2 + 3x \\
\qquad\quad \underline{\;\;\, 2x^3 \qquad\;\; + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad -x^2 + 5x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\; x^2 \qquad\;\; + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; 5x + 2
\end{array}$$

mit Asymptote $a(x) = 2x^3 - 2x - 1$ und echt gebrochenrationaler Funktion $r(x) = \dfrac{5x+2}{x^2+1}$.

(ii) Es soll die Partialbruchzerlegung einer einfachen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 1}$ durchgeführt werden. Die Definitionsmenge von f ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$. Die Zerlegung des Nennerpolynoms in Linearfaktoren ist gegeben durch

$$q(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

Die Nullstellen des Nenners ($x_1 = 1$, $x_2 = -1$) sind jeweils keine Nullstellen des Zählers, weshalb nichts gekürzt werden kann und der nachstehende Ansatz für die Partialbruchzerlegung folgt (wieder mit der Umbenennung $A := A_{1;1}$ und $B := A_{2;1}$):

$$\frac{4x}{x^2 - 1} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(A + B)x + (A - B)}{x^2 - 1}$$

Der Koeffizientenvergleich führt auf ein Gleichungssystem für A und B:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & A + B \stackrel{!}{=} 4 \\ \text{II)} \quad & A - B \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $A = 2$ und $B = 2$ sowie das Ergebnis der Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 - 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{2}{x + 1}$$

(iii) Zur Illustration, wie gemeinsame Faktoren des Zähler- und Nennerpolynoms die Partialbruchzerlegung vereinfachen, betrachte $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 4}$. Die Faktorisierung des Nennerpolynoms liest sich wie zuvor:

$$q(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 4 = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x^2 + 1)$$

Daraus ergibt sich die Definitionsmenge von f zu $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Für das Zählerpolynom führt die zweimalige Anwendung der dritten binomischen Formel zu folgender Faktorisierung:

$$p(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

Durch Kürzen vereinfacht sich die Funktion f zu: $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 2)^2}$. Dies ist schon sehr nah an der Partialbruchzerlegung, allerdings stört das lineare Polynom im Zähler. Es folgt der nachstehende Ansatz für die Partialbruchzerlegung, bei der nur eine (doppelte) Nullstelle $x_1 = 2$ zu berücksichtigen ist (wieder mit der Umbenennung $A := A_{1;1}$ und $B := A_{1;2}$):

$$\frac{x + 1}{(x - 2)^2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} = \frac{A(x - 2) + B}{(x - 2)^2} = \frac{Ax + (-2A + B)}{(x - 2)^2}$$

Der Koeffizientenvergleich führt direkt zu $A = 1$ und $B = 3$, woraus sich das Ergebnis der Partialbruchzerlegung ergibt:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 4} = \frac{x + 1}{(x - 2)^2} = \frac{1}{x - 2} + \frac{3}{(x - 2)^2}$$

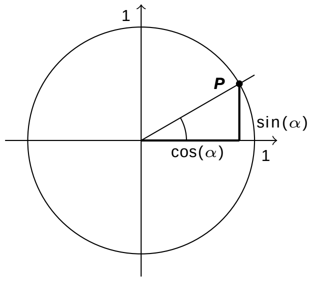
Definition 1.19 (Sinus und Kosinus) Sei P ein Punkt auf dem Einheitskreis, dessen Ortsvektor mit der positiven Abszissenachse (x-Achse) den Winkel α einschließt. Dann ist $\cos(\alpha)$ gleich der Abszisse (x-Wert) von P und $\sin(\alpha)$ gleich dessen Ordinate (y-Wert):

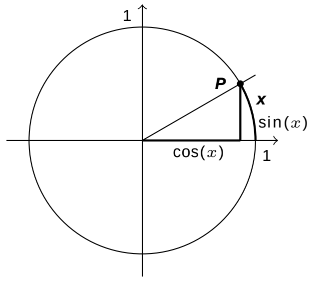
$$P = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{bzw.} \quad P = (\cos(x), \sin(x)) \; ,$$

wenn x die Länge des zu α gehörenden Kreisbogens auf dem Einheitskreis bezeichnet.

α : Winkel in Gradmaß

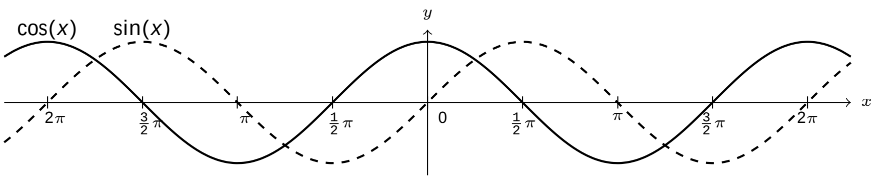
x : Winkel in Bogenmaß





Eigenschaften von Sinus und Kosinus (als Funktion des Bogenmaßes)

1. Sinus und Kosinus sind reelle Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



2. Sinus und Kosinus sind periodisch mit Periode $p = 2\pi$.
3. Der Sinus ist eine ungerade, der Kosinus eine gerade Funktion.
4. $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
5. $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$
   $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
6. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ und $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
7. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
8. Für Sinus und Kosinus gelten **Additionstheoreme** für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

9. Zur Umrechnung zwischen Gradmaß (Winkel) und Bogenmaß (Strecke auf Einheitskreis) gilt:

$$x = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{x}{2\pi} \cdot 360^\circ$$

Besondere Werte sind nachstehender Tabelle zu entnehmen:

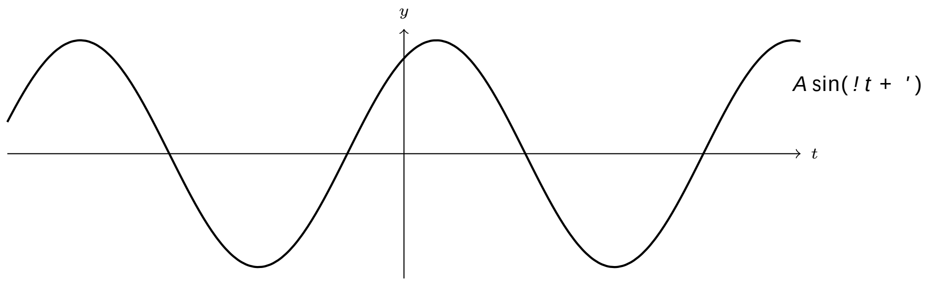
Gradmaß α	0	30	45	90	180	360
Bogenmaß x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Harmonische Schwingung

Eine **harmonische Schwingung** ist eine periodische Bewegung, die durch eine von der Zeit t abhängige Funktion der Form

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \text{ bzw. } f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

mit **Amplitude** $A > 0$, **Kreisfrequenz** $\omega > 0$ und **Phasenverschiebung** $\varphi \in [0, 2\pi)$ beschrieben wird. Die **Frequenz** f ermittelt sich aus $\omega = 2\pi f$.



Die äquivalente Beschreibung einer harmonischen Schwingung entweder durch den Sinus oder den Kosinus ergibt sich aus folgender Überlegung:

$$\begin{aligned}
\text{Für Zeiten } t \in \mathbb{R} \text{ ist} \quad f(t) &= A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\
&= A \cdot \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\
&= A \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \\
&= A \cdot \cos(\omega t + \varphi')
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist eine neue Phasenverschiebung φ' definiert worden, welche die harmonische Schwingung äquivalent beschreibt.

Beispiel 1.18 Gesucht ist eine harmonische Schwingung, die um den festen Wert $b \in \mathbb{R}$ oszilliert und für $t \geq 0$ dabei das erste Maximum bei $(\pi, 3)$ sowie das erste Minimum bei $(4\pi, -1)$ besitzt. Der Ansatz für die gesuchte Funktion lautet:

$$f(t) = b + A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

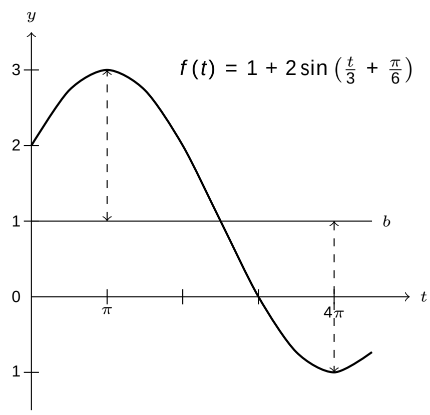
Der feste Wert, um den die Oszillation stattfindet, liegt zwischen dem minimalen und maximalen Wert:

$$b = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

Die Amplitude ist die Hälfte des Abstandes zwischen minimalem und maximalem Wert:

$$A = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

Dies entspricht auch gerade dem Abstand zwischen dem festen Wert b und dem Minimum sowie dem Maximum.



Die Bedingung, dass die angegeben Punkte auf der Kurve liegen müssen, ergibt:

$$\begin{aligned}
&\text{I)} \quad f(\pi) = 1 + 2\sin(\omega\pi + \varphi) \stackrel{!}{=} 3 \quad , \quad \sin(\omega\pi + \varphi) = 1 \\
&\text{II)} \quad f(4\pi) = 1 + 2\sin(4\omega\pi + \varphi) \stackrel{!}{=} -1 \quad , \quad \sin(4\omega\pi + \varphi) = -1
\end{aligned}$$

Aufgrund der Periodizität von Sinus und Kosinus gibt es jeweils unendlich viele Lösungen:

$$\Leftrightarrow \quad \text{I)} \quad \omega\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1 \quad \text{für ein } k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{II)} \quad 4\omega\pi + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k_2 \quad \text{für ein } k_2 \in \mathbb{Z}$$

Subtrahiert man beide Bedingungen voneinander und wählt $k_1 = k_2$, so ergibt sich:

$$3\omega\pi = \pi + 2\pi(k_2 - k_1) = \pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{3}$$

Damit folgt (z.B. aus der ersten Bedingung und $k_1 = 0$) auch die Phasenverschiebung $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und die gesuchte Funktion ergibt sich zu:

$$f(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$$

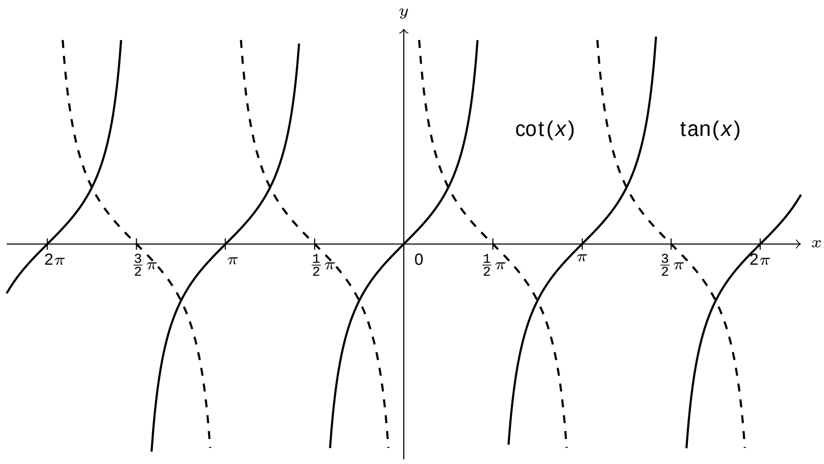
Definition 1.20 (Tangens und Kotangens) Tangens und Kotangens sind definiert als:

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Eigenschaften von Tangens und Kotangens (als Funktion des Bogenmaßes)

1. Tangens und Kotangens sind reelle Funktionen:



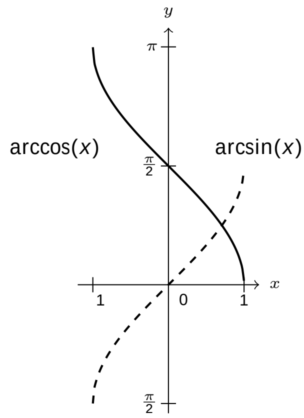
2. Tangens und Kotangens sind periodisch mit Periode $p = \pi$, was mithilfe der Additionstheoreme gezeigt werden kann, z.B:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi)}{\cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi)} = \frac{-\sin(x) + 0}{-\cos(x) - 0} = \tan(x)$$

3. Tangens und Kotangens sind ungerade Funktionen, was sich aus den Symmetrien von Sinus (ungerade) und Kosinus (gerade) unmittelbar ergibt, z.B.

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Trigonometrische Umkehrfunktionen Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen impliziert, dass diese auf ihrer Definitionsmenge nicht umkehrbar sind. Geeignete Einschränkungen der Definitionsmenge führen hingegen zu umkehrbaren Funktionen:

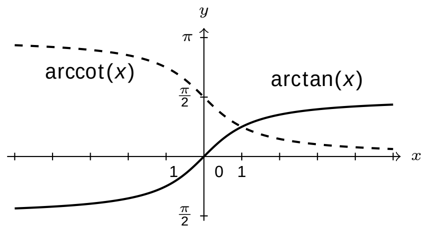


$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist umkehrbar durch

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \quad (\textbf{Arkuskosinus})$$

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist umkehrbar durch

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (\textbf{Arkussinus})$$

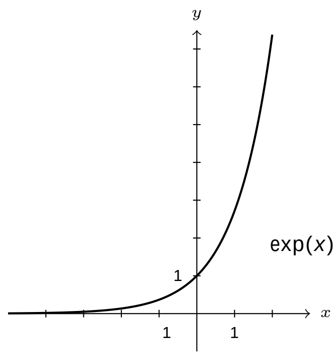


$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar durch

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad (\textbf{Arkustangens})$$

$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar durch

$$\text{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \quad (\textbf{Arkuskotangens})$$



Definition 1.21 Die reelle Funktion

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (0, \infty) \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

heißt **Exponentialfunktion** (zur Basis e).

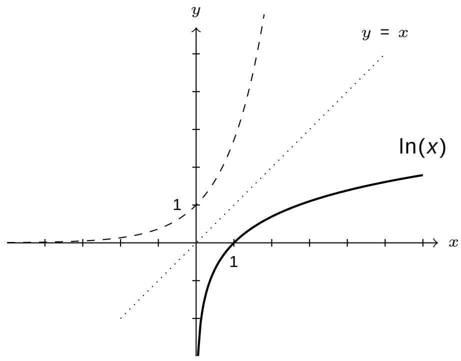
Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. $\exp(0) = 1$.
2. $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$.
3. $0 < \exp(x) < 1$ für alle $x < 0$.
4. exp ist streng monoton steigend.
5. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (Funktionalgleichung).
6. $(\exp(x))^y = \exp(xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Definition 1.22 Die reelle Funktion

$$\begin{aligned} \ln : \quad (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

heißt **Logarithmusfunktion**. Sie ist definiert als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.



<u>Eigenschaften der Logarithmusfunktion</u>

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\ln(x) > 0$ für alle $x > 1$.
3. $\ln(x) < 0$ für alle $0 < x < 1$.
4. ln ist streng monoton steigend
5. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
6. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
7. $\ln(x^y) = y \ln(x)$ für alle $x > 0, y \in \mathbb{R}$.

Definition 1.23 (Verallgemeinerung von exp und ln) 1. Die reelle Funktion

$$\begin{aligned} a^x : \quad \mathbb{R} &\to (0, \infty) \\ x &\mapsto a^x := e^{x \ln(a)} \end{aligned}$$

für $a > 0$ heißt (allgemeine) **Exponentialfunktion zur Basis a**.

2. Die (allgemeine) **Logarithmusfunktion zur Basis a** ($a > 0, a \neq 1$)

$$\begin{aligned} \log_a(x) : \quad (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a(x) \end{aligned}$$

ist definiert als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a.

3. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die (allgemeine) **Potenzfunktion** die reelle Funktion

$$\begin{aligned} x^\alpha : \quad (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \end{aligned}$$

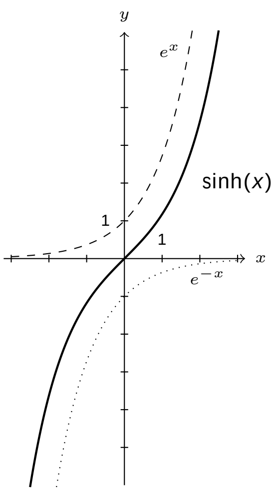
Definition 1.24

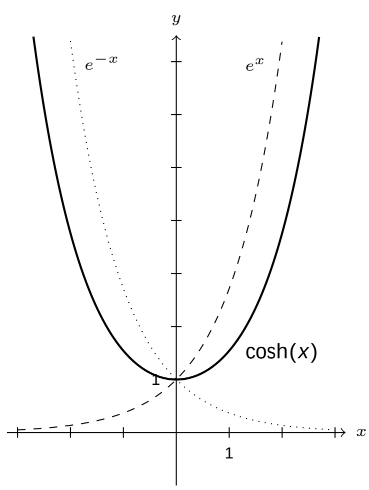
Der **Kosinus hyperbolicus** ist die reelle Funktion

$$\begin{aligned} \cosh : \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Der **Sinus hyperbolicus** ist die reelle Funktion

$$\begin{aligned} \sinh : \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$





Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

1. cosh ist eine gerade Funktion, sinh ist eine ungerade Funktion, was sich direkt aus den Definitionen ergibt:

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) = \cosh(x)$$
$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = \frac{1}{2}\left(-e^{x} + e^{-x}\right) = -\sinh(x)$$

2. $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$, was man direkt nachrechnen kann:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}\right) = e^x$$

3. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was auch direkt nachzurechnen ist:

$$\begin{aligned}
\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \frac{1}{4}\left[\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4e^x e^{-x} = 1
\end{aligned}$$

Bemerkung

In $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ wird die Exponentialfunktion in ihren geraden Anteil (cosh) und ihren ungeraden Anteil (sinh) zerlegt. Dies ist für jede Funktion in eindeutiger Weise möglich. Es gilt: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich eindeutig in ihren geraden und ungeraden Anteil zerlegen, d.h. $f(x) = g(x) + u(x)$ mit einer geraden Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ungeraden Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die ***Existenz*** einer solchen Zerlegung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x) + 0 &= \frac{2 \cdot f(x)}{2} + \frac{0}{2} \\
&= \frac{f(x) + f(x)}{2} + \frac{f(-x) - f(-x)}{2} \\
&= \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{=:g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{=:u(x)} = g(x) + u(x)
\end{aligned}$$

Die beiden Funktionen g und u sind in der Tat gerade bzw. ungerade Funktionen. Für das Beispiel $f(x) = e^x$ reproduzieren $g(x)$ und $u(x)$ genau die Definitionen von cosh und sinh.

Die ***Eindeutigkeit*** einer solchen Zerlegung ist auch gegeben, denn angenommen es gäbe zwei Zerlegungen, so hat man

$$f(x) = g_1(x) + u_1(x) = g_2(x) + u_2(x)$$

Aufgrund der Symmetrie der Summanden ergibt sich daraus:

$$f(-x) = g_1(x) - u_1(x) = g_2(x) - u_2(x)$$

Addiert man diese beiden Bedingungen, so ergibt sich:

$$2g_1(x) + 0 = 2g_2(x) + 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_1(x) = g_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad g_1 \equiv g_2$$

Ebenso erhält man durch Subtraktion der beiden Bedingungen:

$$0 + 2u_1(x) = 0 + 2u_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad u_1(x) = u_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad u_1 \equiv u_2$$

Damit sind die geraden sowie ungeraden Komponenten der Zerlegungen paarweise identisch.

Geometrische Interpretation der Hyperbelfunktionen

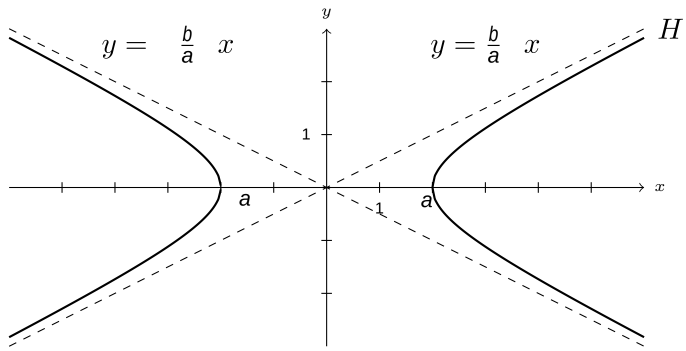
Sei $H_{a;b}$ eine **Hyperbel** mit Parametern $a, b > 0$ gegeben durch:

$$H_{a;b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\} .$$

Die Koordinaten der Hyperbel $H_{a;b}$ lassen sich parametrisieren durch ein $t \in \mathbb{R}$:

$$x_a(t) = \pm a \cdot \cosh(t)$$

$$y_b(t) = b \cdot \sinh(t)$$



Eine Hyperbel lässt sich daher alternativ beschreiben durch:

$$H_{a;b} = \{(x_a(t), y_b(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} .$$

2 Komplexe Zahlen und komplexe Funktionen

In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht gelöst werden. Man führt daher eine neue Zahl $i \notin \mathbb{R}$ ein, für die gilt:

$$i^2 = -1$$

Damit erhält man sofort eine zweite Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, nämlich $x = -i$, denn es gilt ebenso: $(-i)^2 = -1$.

Definition 2.1 Die Zahl i heißt **imaginäre Einheit**. Die Menge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ ist definiert als:

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Die Darstellung einer komplexen Zahl z in der Form $z = x + iy$ nennt man **kartesische Form** oder **Komponentenform**, $x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ den **Realteil** und $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ den **Imaginärteil** von z. Diese sind Funktionen auf der Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z = x + iy \mapsto x$$

$$\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z = x + iy \mapsto y$$

Bemerkungen

- Da $a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $i \notin \mathbb{R}$.
- Für die imaginäre Einheit i gilt: $\mathrm{Re}(i) = 0$, $\mathrm{Im}(i) = 1$.
- Zur Bezeichnung der imaginären Einheit wird anstelle des Symbols i manchmal das Symbol j verwendet (z.B. in der Elektrotechnik).
- Die komplexen Zahlen z, mit $\mathrm{Im}(z) = 0$ ist, werden mit den reellen Zahlen identifiziert. Es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Komplexe Zahlen z mit $\mathrm{Re}(z) = 0$ ist, heißen **rein-imaginär**.
- Die Menge der komplexe Zahlen kann nicht angeordnet werden, ohne die üblichen Größer-Kleiner-Beziehungen der in ihnen enthaltenen reellen Zahlen zu verletzen. Aussagen wie $i > 0$ oder $1 + 2i < 2 - i$ können in $\mathbb{C}$ also **nicht sinnvoll** getroffen werden. Dies lässt sich wie folgt begründen:
  - Nimmt man an, dass $i > 0$ gilt, so folgt aus dieser Ungleichung durch Multiplikation mit i (nach Annahme eine positive Zahl), dass $-1 = i^2 > 0 \cdot i = 0$ gilt, ein Widerspruch. Daher ist die Aussage $i > 0$ falsch.
  - Nimmt man andererseits an, dass $i < 0$ gilt, so folgt durch Multiplikation mit i (nach Annahme eine negative Zahl), dass $-1 = i^2 > 0$. Dabei hat sich die Ungleichung aufgrund der Multiplikation mit einer negativen Zahl umgekehrt und es folgt der gleiche Widerspruch. Daher ist die Aussage $i < 0$ ebenfalls falsch.
- Zur Veranschaulichung der komplexen Zahlen können Punkte bzw. Ortsvektoren in der **Gaußschen Zahlenebene** herangezogen werden.

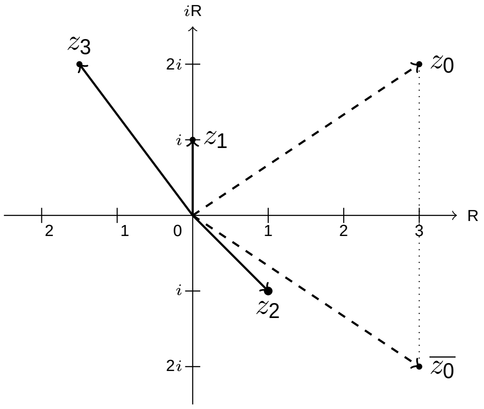
Beispiel 2.1 Viele Rechenoperationen und Eigenschaften der komplexen Zahlen lassen sich geometrisch interpretieren. Betrachte etwa z_1, z_2, z_3 sowie z_0 in der Gaußschen Zahlenebene:

$z_1 = i \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(i) = 0,\ \mathrm{Im}(i) = 1$

$z_2 = 1 - i \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(1 - i) = 1,\ \mathrm{Im}(1 - i) = -1$

$z_3 = -\frac{3}{2} + 2i \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_3) = -\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}(z_3) = 2$

$z_0 = 3 + 2i \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_0) = 3,\ \mathrm{Im}(z_0) = 2$



Wie lautet die komplexe Zahl, die durch Spiegelung von z_0 an der reellen Achse entsteht?

$$\overline{z_0} = 3 - 2i$$

Wie groß ist der Abstand der komplexen Zahl z_0 zum Ursprung? Mit Pythagoras erhält man:

$$|z_0| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Wie groß ist der Abstand der zu z_0 gespiegelten Zahl zum Ursprung?

$$|\overline{z_0}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Definition 2.2 Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die zu z **konjugiert komplexe Zahl** ist definiert als

$$\overline{z} := x - iy$$

Der **Betrag** von z ist definiert als

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

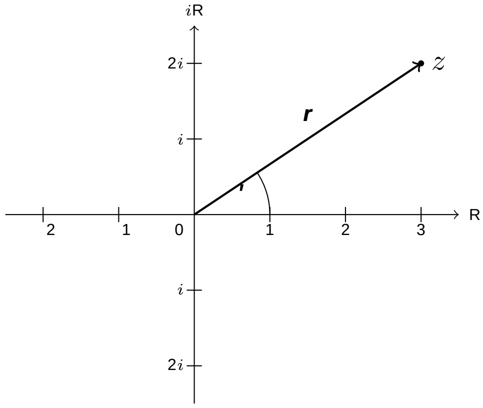
Bemerkungen

- Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ wird auch mit z^* oder $\mathrm{conj}(z)$ bezeichnet. Sie ist die komplexe Zahl, die man erhält, wenn man z an der reellen Achse spiegelt.
- Es gilt: $z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.
- Die komplexe Konjugation ist eine sog. **Involution**, d.h. $\overline{\overline{z}} = z$.
- Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl ist ihr Abstand zum Ursprung.
- Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $|\overline{z}| = |z|$.

Definition 2.3 Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig in der Form

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

schreiben, wobei $r = |z|$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Ortsvektor z ist. $\varphi = \arg(z)$ wird auch **Argument** oder **Phase** von z genannt. Für $z = 0$ definiere $\arg(0) := 0$.



Bemerkungen

- Die Darstellung $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ heißt **Polarform** oder **trigonometrische Form** von z.

- Die Polarform einer komplexen Zahl ist nur dann eindeutig, wenn für das Argument φ ein halboffenes Intervall der Länge 2π verwendet wird. Neben dem Intervall $[0, 2\pi)$ ist auch das Intervall $(-\pi, \pi]$ gebräuchlich. Allgemeiner gilt für $z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

Umrechnungsformeln zwischen kartesischer und trigonometrischer Form

kartesische Form (x, y)	$\Leftrightarrow$	**Polarform** (r, φ)
$z = x + iy$	$\Rightarrow$	$r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{falls } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{falls } y < 0 \end{cases}$
$x = \mathrm{Re}(z) = r\cos(\varphi)$ $y = \mathrm{Im}(z) = r\sin(\varphi)$	$\Leftarrow$	$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

Beispiel 2.2 Es werden wieder die vorherigen Beispiele z_1, z_2, z_3 betrachtet.

(i) Für $z_1 = i$ gilt:

$$\Rightarrow \lvert z_1\rvert = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$
$$\Rightarrow \varphi_1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

Damit gilt: $z_1 = r \cdot (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)) = 1 \cdot (0 + i \cdot 1) = i$ ✓

(ii) Für $z_2 = 1 - i$ gilt:

$$\Rightarrow \lvert z_2\rvert = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \varphi_2 = (270^\circ + 45^\circ) = \frac{7\pi}{4}$$

Damit gilt: $z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1 - i$ ✓

(iii) Für $z_3 = -\frac{3}{2} + 2i$ gilt:

$$\Rightarrow \lvert z_3\rvert = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow \varphi_3 = \pi - \arctan\left(\frac{\lvert \mathrm{Im}(z_3)\rvert}{\lvert \mathrm{Re}(z_3)\rvert}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

Damit gilt: $z_3 = \frac{5}{2} \cdot (\cos(\varphi_3) + i\sin(\varphi_3)) = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5} + i \cdot \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{2} + 2i$ ✓

Definition 2.4 (Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$)
Für $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ ist ihre Summe definiert als

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

sowie ihr Produkt definiert als

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

<u>Bemerkungen</u>

- In den komplexen Zahlen rechnet man grundsätzlich genauso wie in den reellen Zahlen unter Berücksichtigung, dass komplexe Zahlen nicht sinnvoll angeordnet werden können, d.h. es keine Ordnungsrelation gibt, und für die imaginäre Einheit $i^2 = -1$ gilt.

- Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist
$$\overline{z} = x + i(-y) = x - iy$$

- Für $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

- Für $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

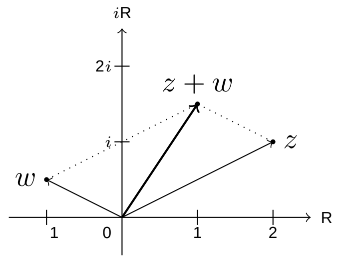
Satz 2.5 Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
2. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
5. $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \in \mathbb{R}$

<u>Bemerkungen</u>

- Geometrisch interpretiert ist die Addition zweier komplexer Zahlen $z+w$ die „Verkettung“ der beiden Ortsvektoren von z und w.

- Die Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$ verallgemeinert direkt die für reelle Zahlen gültige Dreiecksungleichung. In der komplexen Ebene ist ihr Name besser ersichtlich.



<u>Vorbemerkung 1 zu komplexen Funktionen</u>
Es gilt $\sqrt{16} = +4$ und $\sqrt{16} \neq -4$, obwohl die positive sowie negative Zahl die Gleichung $x^2 - 16 = 0$ löst: $(-4)^2 = 16$. Die (reelle) Wurzelfunktion ist aber definiert als $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x} \geq 0$, sodass $(\sqrt{x})^2 = x$ gilt. Die Lösungen von $x^2 - 16 = 0$ sind deshalb $x_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.

Kann man die Wurzelfunktion in die komplexen Zahlen übertragen, also Ausdrücke wie etwa $\sqrt{1+i}$ definieren? Was soll mit $\sqrt{1+i}$ gemeint sein? Wenn man sagt, dass es Lösung der Gleichung $z^2 = 1+i$ ist, folgt sofort $z \notin \mathbb{R}$. Man sieht auch, dass mit einem etwaigen $z_1 = \sqrt{1+i}$ auch $z_2 = -z_1$ eine Lösung der Gleichung ist, denn $z_2^2 = (-z_1)^2 = z_1^2 = 1+i$. Allerdings lässt sich nicht wie im Reellen, die „positive Lösung“ wählen, da es auf $\mathbb{C}$ keine sinnvolle Anordnung (Ordnungsrelation) gibt. Daher ist es nicht möglich, eine komplexe Wurzel-**funktion** zu definieren. Es gilt vielmehr:

> In den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind Wurzeln nicht eindeutig und stehen für mehrere komplexe Zahlen gleichzeitig.

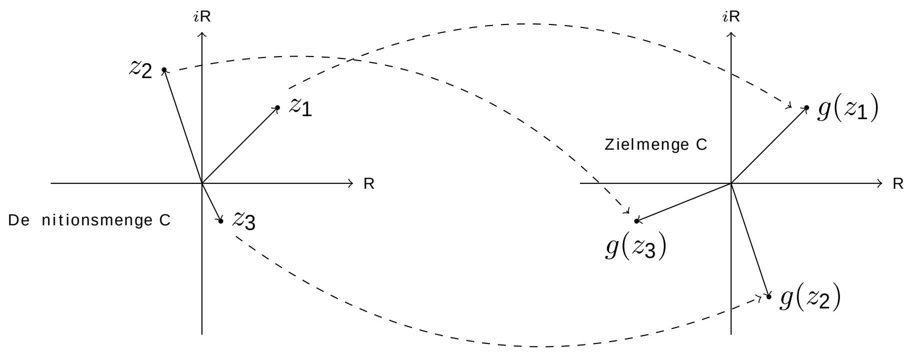
Daraus folgt auch, dass reelle Potenzgesetze nicht in jedem Fall auf $\mathbb{C}$ übertragbar sind. Die aus Satz 1.8 bekannte Rechenregel $(a \cdot b)^p$ führt für $a = -1$, $b = -4$ und $p = \frac{1}{2}$ zu einem Widerspruch, wenn man sie auf die komplexen Zahlen überträgt:

$$(a \cdot p)^p = ((-1)\cdot(-4))^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \stackrel{?}{=} a^p \cdot b^p = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-4)^{\frac{1}{2}} = i \cdot 2i = -2 \quad \text{Widerspruch!}$$

Auf der rechten Seite des Rechenregel wurden Wurzeln aus negativen Zahlen gezogen, was aber aufgrund der ihrer Mehrdeutigkeit nicht erlaubt ist. Für ganzzahlige Exponenten $p \in \mathbb{Z}$ allerdings ist das Rechengesetz auch für komplexe Zahlen weiterhin gültig.

<u>Vorbemerkung 2 zu komplexen Funktionen</u>

Betrachtet man für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Graph $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so ist dieser in einer **zweidimensionalen Fläche** darstellbar. Eine komplexe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hingegen mit Graph $G_g = \{(z, g(z)) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ hat bereits die zweidimensionale Gaußsche Ebene als Definitionsmenge. Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ist ihr Funktionswert $g(z) \in \mathbb{C}$ wieder ein Punkt einer zweidimensionalen Fläche, weshalb der Graph G_g insgesamt **vierdimensional** ist.



Für Spezialfälle, in denen das Ergebnis von $g(z)$ eine reelle Zahl ist, sind **dreidimensionale** Graphen möglich. Dazu zählen z.B. $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sowie der Betrag einer komplexen Zahl $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Anstelle von dreidimensionalen Plots sind in zwei Dimensionen Niveauplots möglich oder allgemeiner die Nutzung von Farbcodierungen.

Definition 2.6 Die Funktion

$$\begin{aligned} \exp : \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z = x + iy \mapsto e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \end{aligned}$$

heißt **komplexe Exponentialfunktion**.

Eigenschaften der komplexen e-Funktion

1. Die komplexe Exponentialfunktion stimmt auf $\mathbb{R}$ mit der reellen Exponentialfunktion überein. Dies gilt, denn für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) = 0$ ist laut Definition:
$$\mathbb{C} \ni e^z = e^{x+i\cdot 0} = e^x(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = e^x(1 + i \cdot 0) = e^x \in \mathbb{R}$$
Damit verallgemeinert die komplexe e-Funktion die reelle e-Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dies gilt, denn die Gleichung $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = 0$ ist erfüllt, sobald einer der beiden Faktoren verschwindet. Dies ist allerdings nicht möglich, denn:
   - Für die reelle Exponentialfunktion gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, daher kann dieser Faktor nicht verschwinden.
   - Der zweite Faktor verschwindet, falls $\cos y = 0$ und gleichzeitig $\sin y = 0$. Dies ist für kein $y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

3. Das Potenzgesetz $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ gilt auch für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$.
Dies ist richtig, denn für $z = x_1 + iy_1$ und $w = x_2 + iy_2$ gilt:
$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} && \mid \text{direkt aufgrund der Definition der komplexen } e\text{-Funktion} \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] && \mid \text{bekannte reelle Rechenregeln} \\ &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot \left[\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2) + i\left(\sin(y_1)\cos(y_2) + \cos(y_1)\sin(y_2)\right)\right] \\ &= e^{x_1}\left[\cos(y_1) + i\sin(y_1)\right] \cdot e^{x_2}\left[\cos(y_2) + i\sin(y_2)\right] \\ &= e^z \cdot e^w \quad ✓ \end{aligned}$$

4. Aus dem Reellen kann für alle $z \in \mathbb{C}$ ebenfalls $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ übernommen werden, denn
$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-(x+iy)} = e^{-x-iy} \\ &= e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)) \\ &= e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y)); \\ \tfrac{1}{e^z} &= \frac{1}{e^x(\cos(y) + i\sin(y))} && \mid \text{Erweitern mit komplex konjugiertem Nenner} \\ &= e^{-x} \cdot \frac{\cos(y) - i\sin(y)}{\cos^2(y) - (i\sin(y))^2} = e^{-x} \cdot \frac{\cos(y) - i\sin(y)}{\cos^2(y) + \sin^2(y)} && \mid \text{trigonometrischer Pythagoras} \\ &= e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y)) \quad ✓ \end{aligned}$$

5. Für rein imaginäre $z \in \mathbb{C}$ gilt die **Eulersche Formel**:
$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$
Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 0$ schreibt man anstelle von $z = 0 + iy = iy$ oftmals $z = i\varphi$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Die Eulersche Formel folgt dann sofort aus der Definition der komplexen e-Funktion. Es gilt, dass $|e^{i\varphi}| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, denn
$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}(e^{i\varphi})\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(e^{i\varphi})\right)^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1 \quad ✓$$
Aus der Eulerschen Formel ergeben sich einige spezielle Werte der komplexen e-Funktion:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos(\varphi)$	1	0	-1	0	1
$\sin(\varphi)$	0	1	0	-1	0
$\Rightarrow e^{i\varphi}$	1	i	-1	$-i$	1

6. Die komplexe e-Funktion ist periodisch mit Periode $p = 2\pi i$. Um diese Behauptung nachzuweisen, muss man für alle $z \in \mathbb{C}$ zeigen, dass $e^{z+2\pi i} = e^z$ gilt. Es sei $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} \\ &= e^x(\cos(y+2\pi) + i\cos(y+2\pi)) \quad | \text{ Periodizität von Sinus und Kosinus} \\ &= e^x(\cos(y) + i\cos(y)) \\ &= e^z \quad \checkmark \end{aligned}$$

7. Aus der Eulerschen Formel folgen Darstellungen der Sinus- und Kosinusfunktion:

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + \mathrm{conj}\left(e^{i\varphi}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - \mathrm{conj}\left(e^{i\varphi}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

8. Bei der Übertragung von reellen Rechenregeln in die komplexen Zahlen ist Vorsicht geboten, wie bereits in dem Beispiel der Vorbemerkung 1 zu komplexen Funktionen dargestellt. Aufgrund der Periodizität von $\exp(z)$ und den mehrdeutigen Wurzeln aus komplexen Zahlen gilt im Allgemeinen: $(e^z)^w \neq e^{z \cdot w}$. Beispielsweise gilt für $z = 2\pi i$ und $w = \frac{1}{2}$:

$$(e^z)^w = \left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \overset{?}{=} e^{z\cdot w} = e^{2\pi i \cdot \frac{1}{2}} = e^{\pi i} = -1 \quad \text{Widerspruch!}$$

Die Rechenregel kann für $z \in \mathbb{C}$ übernommen werden, falls $w \in \mathbb{Z}$ gilt.

Satz 2.7
Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig in der Form $z = |z|e^{i\varphi}$ schreiben, wobei $\varphi = \arg(z)$ ist.

Bemerkungen

Neben der kartesischen Darstellungen komplexer Zahlen, $z = x+iy$, und der Polardarstellung, $z = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, ermöglicht die Eulersche Formel eine dritte, äquivalente Darstellung.

Die Darstellung einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ nennt man **Exponentialform**.

Multiplikation von komplexen Zahlen in der Exponentialform:

Für $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$ ist $w = z_1 \cdot z_2$:

$$w = |z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = |w|e^{i\varphi_w}$$

Die geometrische Interpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen (in Exponentialform) ist die einer **Drehstreckung**: Der Betrag von $w = z_1 \cdot z_2$ ergibt sich als Produkt der Einzelbeträge, $|w| = |z_1| \cdot |z_2|$ („Streckung“), während sich das Argument von $w = z_1 \cdot z_2$ aus der Summe der Einzelargumente ergibt: $\varphi_w = \varphi_1 + \varphi_2$ („Drehung“).

Insbesondere gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Speziell für $|z| = 1$ ergibt dies die **Formel von Moivre**:

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Aus einem separaten Vergleich des Real- und Imaginärteils dieser allgemeinen Formel lassen sich Ausdrücke für $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ unter Verwendung von Sinus- und Kosinusfunktionen des einfachen Arguments ableiten, z.B. $\cos(3\varphi) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$.

Aufgrund ihrer Schönheit wird ein Spezialfall der Eulerschen Formel, $e^{2\pi i} - 1 = 0$, gerne hervorgehoben, da in ihr sechs besondere mathematische Konstanten zusammenspielen.

Beispiel 2.3

(i) Für $z = 1 + i$ ergibt sich direkt aus der kartesischen Form: $z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Alternativ berechnet man in Exponentialform mit $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, d.h. $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. Daraus folgt: $z^2 = |z|^2 \cdot e^{i\varphi \cdot 2} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$.

(ii) In dem ersten Beispiel ist der Vorteil der Exponentialform noch nicht evident, da auch in kartesischer Darstellung das Ergebnis schnell berechnet werden kann. Wieder mit $z = 1 + i$ ist für $w = z^{42}$ die Rechnung in kartesischer Darstellung äußerst aufwändig. Anders dagegen unter Verwendung der Exponentialform: Es gilt wieder $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, sodass:

$$
\begin{aligned}
w = z^{42} = (1+i)^{42} &= \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{42} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{2 \cdot 21} \cdot e^{i\frac{42\pi}{4}} \\
&= 2^{21} \cdot e^{5 \cdot 2\pi i + i\frac{\pi}{2}} \quad \big|\ 2\pi i\text{-Periodizität der komplexen Exponentialfunktion} \\
&= 2^{21} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2.097.152i
\end{aligned}
$$

(iii) Möchte man nun alle $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, sodass $z^2 = 1 + i$ gilt, so kann nicht einfach $z = \sqrt{1+i}$ geschrieben werden (siehe Vorbemerkung 1 zu komplexen Funktionen). Diese Aufgabe soll nun zunächst unter Verwendung der kartesischen Form und anschließend unter Verwendung der Exponentialform gelöst werden.

<u>Ansatz in kartesischer Form</u>: $z = x + iy$ soll $z^2 = 1 + i$ lösen, also führt Einsetzen des Ansatzes zu $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 1 + i$. Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$
\begin{aligned}
&\text{I)} \quad x^2 - y^2 \overset{!}{=} 1 \\
&\text{II)} \quad 2xy \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2x} \text{ für } x \neq 0
\end{aligned}
$$

Aus I) und $A := x^2 > 0$ ergibt sich: $A^2 - A - \frac{1}{4} = 0$. Dies wird für $A_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ gelöst, aufgrund der Restriktion $A > 0$ ist aber nur $A_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ möglich. Aus $x^2 = A$ ergeben sich damit zwei Lösungen

$$
x_{1,2} = \pm\sqrt{A} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}
$$

Für y ergeben sich damit ebenfalls zwei Lösungen:

$$
y_{1,2} = \frac{1}{2x_{1,2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}
$$

Für die beiden gesuchten komplexen Zahlen $z_{1,2} \in \mathbb{C}$ ergibt sich insgesamt

$$
z_1 = x_1 + iy_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{i}{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}
$$

$$
z_2 = x_2 + iy_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{i}{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}} = -z_1
$$

Ansatz in Exponentialform: $z = r \cdot e^{i\varphi}$ soll $z^2 = 1 + i$ lösen, also führt man die rechte Seite zunächst auch in die Exponentialform über: $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. Damit lautet die Gleichung:

$$z^2 = r^2 \cdot e^{i\varphi \cdot 2} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Für den Betrag gilt damit: $r^2 = \sqrt{2}$, also $r = \sqrt[4]{2}$. Für das Argument gilt: $e^{i2\varphi} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ ergibt sich folgende Bedingung: $\varphi = \frac{\pi}{8} + \pi k$.

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{8} \quad \checkmark \\
k = 1 \quad &\Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8} \quad \checkmark \\
k = 2 \quad &\Rightarrow \varphi_3 \overset{?}{=} \frac{\pi}{8} + 2\pi > 2\pi \qquad \text{d.h. keine weitere Lösung, da } \varphi_3 \,\hat{=}\, \varphi_1
\end{aligned}$$

Für die beiden gesuchten komplexen Zahlen $z_{1,2} \in \mathbb{C}$ ergibt sich insgesamt

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

$\Rightarrow$ Es gilt natürlich, dass die Lösungen der beiden Methoden übereinstimmen. Dies kann man durch Umrechnung der kartesischen Lösung in Exponentialform oder durch Umschreiben der Exponentialform in kartesische Form direkt bestätigen.

(iv) Gesucht sind alle komplexen Lösungen von $(3 - z)^2 = -2i$. Diese Aufgabe kann wieder mit einem kartesischen Ansatz oder mit einem Ansatz in Exponentialform gelöst werden:

Ansatz in kartesischer Form: $z = x + iy$ soll $(3 - z)^2 = -2i$ lösen, also führt Einsetzen des Ansatzes zu $(3 - x - iy)^2 = (3 - x)^2 - y^2 - 2iy(3 - x) = -2i$. Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
&\text{I)} \quad (3 - x)^2 - y^2 \overset{!}{=} 0 \\
&\text{II)} \quad y(3 - x) \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{3 - x} \text{ für } x \neq 3
\end{aligned}$$

Aus I) und $A := (3 - x)^2 > 0$ ergibt sich: $A^2 - 1 = 0$. Dies wird für $A_{1,2} = \pm 1$ gelöst, aufgrund der Restriktion $A > 0$ ist aber nur $A_1 = 1$ möglich. Aus $(3 - x)^2 = A$ ergeben sich damit zwei Lösungen

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Für y ergeben sich damit ebenfalls zwei Lösungen:

$$y_{1,2} = \frac{1}{3 - x_{1,2}}, \quad \text{also: } y_1 = 1 \quad \text{und} \quad y_2 = -1$$

Für die beiden gesuchten komplexen Zahlen $z_{1,2}$ ergibt sich insgesamt

$$z_1 = x_1 + iy_1 = 2 + i$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = 4 - i$$

Ansatz in Exponentialform: Es sei $w := 3 - z$, sodass mit $w = r \cdot e^{i\varphi}$ die Gleichung $w^2 = -2i$ gelöst werden soll. Die eigentliche Lösung ergibt sich dann aus $z = 3 - w$. Die rechte Seite der Gleichung lautet in Exponentialform: $-2i = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Damit ergibt sich:

$$w^2 = r^2 \cdot e^{i\varphi \cdot 2} = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Für den Betrag gilt damit: $r^2 = 2$, also $r = \sqrt{2}$. Für das Argument gilt: $e^{i2\varphi} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow 2\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ ergibt sich folgende Bedingung: $\varphi = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.

$$
\begin{aligned}
k &= 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3\pi}{4} \quad \checkmark \\
k &= 1 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4} \quad \checkmark \\
k &= 2 \quad \Rightarrow \varphi_3 \overset{?}{=} \frac{3\pi}{4} + 2\pi > 2\pi \qquad \text{d.h. keine weitere Lösung, da } \varphi_3 \mathrel{\hat{=}} \varphi_1
\end{aligned}
$$

Für die beiden gesuchten komplexen Zahlen $z_{1,2} \in \mathbb{C}$ ergibt sich insgesamt

$$z_1 = 3 - w_1 = 3 - \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{und} \quad z_2 = 3 - w_2 = 3 - \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Diese Darstellung ist weder rein kartesisch noch rein in Exponentialform. Daher ist eine Umformung in kartesische Form sinnvoll:

$$z_1 = 3 - \sqrt{2} \cdot (\underbrace{\cos(\tfrac{3\pi}{4})}_{= -\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \underbrace{\sin(\tfrac{3\pi}{4})}_{= \frac{1}{\sqrt{2}}}) = 3 - (-1 + i) = 4 - i$$

$$z_2 = 3 - \sqrt{2} \cdot (\underbrace{\cos(\tfrac{7\pi}{4})}_{= \frac{1}{\sqrt{2}}} + i \underbrace{\sin(\tfrac{7\pi}{4})}_{= -\frac{1}{\sqrt{2}}}) = 3 - (1 - i) = 2 + i$$

Dies sind (bis auf Vertauschung $z_1 \leftrightarrow z_2$) die beiden Lösungen, die auch mit dem kartesischen Ansatz gefunden wurden.

Satz 2.8 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes Polynom n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten von Nullstellen).

Beispiel 2.4

(i) Für quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ gelten für eine nichtnegative Diskriminante $D = b^4 - 4ac \geq 0$ die üblichen reellen Lösungen. Bei einer negativen Diskriminante $D < 0$ ergeben sich zwei zueinander komplex konjugierte Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \in \mathbb{C}$$

Für das Polynom $p(x) = 2x^2 + 4$ etwa ergibt sich eine negative Diskriminante $D < 0$ und komplexe Nullstellen, sodass $p(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)$ mit $x_1 = i\sqrt{2}$ und $x_2 = -i\sqrt{2}$.

(ii) Alternativ kann der Fundamentalsatz der Algebra wie folgt formuliert werden: Für $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutige komplexe Zahlen z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, sodass gilt: $p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$.
Bemerkung zur Nomenklatur: Sind die Koeffizienten rein reell, d.h. $a_k \in \mathbb{R}$, so spricht man von einem **reellen Polynom**, auch wenn p auf den komplexen Zahlen definiert ist, d.h. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und komplexe Nullstellen besitzt bzw. besitzen könnte.

(iii) Betrachte das reelle Polynom $p(z) = z^4 - 16$. Zweifache Anwendung der dritten binomischen Formel ergibt:

$$p(z) = z^4 - 16 = (z^2 - 4)(z^2 + 4) = (z - 2)(z + 2)(z - 2i)(z + 2i)$$

Bemerkungen

In den letzten beiden Beispielpolynomen $p(x) = 2x^2 + 4$ und $p(z) = z^4 - 16$ kann man beobachten, dass komplexe Nullstellen stets als Paare z_0 und $\overline{z_0}$ auftreten. Dies ist kein Zufall, sondern gilt für reelle Polynome (also solche mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$) ganz allgemein: Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle eines reellen Polynoms $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p, d.h. $p(\overline{z_0}) = 0$.
Dies lässt sich wie folgt verstehen: Aus der Äquivalenz $0 = p(z_0) \Leftrightarrow 0 = \overline{0} = \overline{p(z_0)}$ folgt

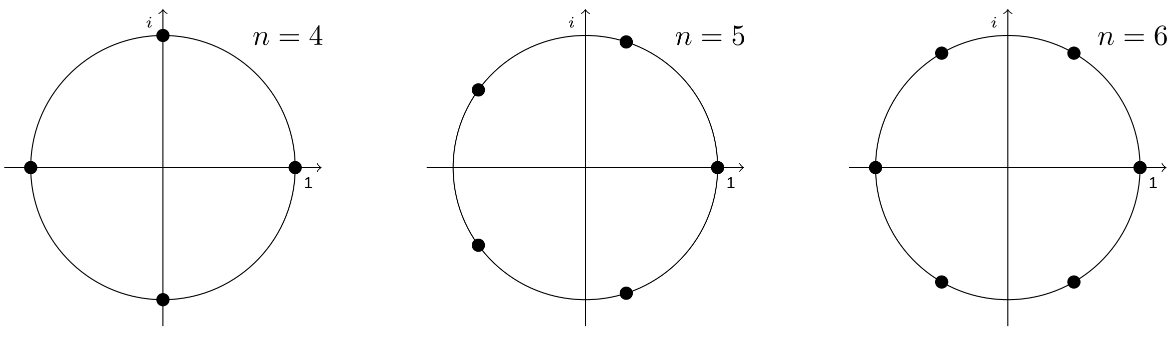
$$
\begin{aligned}
0 = \operatorname{conj}(p(z_0)) &= \operatorname{conj}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{conj}\left(a_k z_0^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\operatorname{conj}(a_k)}_{=a_k \text{ da } a_k \in \mathbb{R}} \cdot \operatorname{conj}\left(z_0^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (\operatorname{conj}(z_0))^k = p(\operatorname{conj}(z_0)) = p(\overline{z_0}) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Die **n-ten Einheitswurzeln z_k** ergeben sich als Nullstellen $p_n(z_k) = 0$ des (reellen) Polynoms $p_n(z) = z^n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie sind gegeben durch

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1$$

Diese Lösungen lassen sich direkt aus einem Ansatz in Exponentialform finden: Sei $z = re^{i\varphi}$ die Lösung von $p_n(z) = z^n - 1 = 0$, dann gilt: $z^n = r^n e^{i\varphi n} \stackrel{!}{=} 1$. Die rechte Seite lautet in Exponentialform: $1 = 1 \cdot e^{i\,0}$, daher gilt für den Betrag $r = \sqrt[n]{1} = 1$, sowie für das Argument $n\varphi = 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$, wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ gelten muss. Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich: $0 \leq \varphi = \frac{2\pi k}{n} < 2\pi$, was für alle $k = 0, 1, \ldots, n-1$ erfüllt ist. Diese ergeben die n-ten Einheitswurzeln (n Stück).

Geometrisch befinden sich die n-ten Einheitswurzeln gleichverteilt auf dem komplexen Einheitskreis, ausgehend von $z_0 = 1$. Man erkennt aufgrund der Symmetrie, dass für gerade Grade des Polynoms p (z.B. $\deg(p) = 2, 4, 6$) eine Einheitswurzel gerade $z_{\frac{n}{2}} = e^{i\pi} = -1$ ist. Auch ist ersichtlich, dass stets Paare zueinander komplex konjugierter Nullstellen auftreten (vgl. oben stehende Bemerkung).



Zum Abschluss dieses Kapitels stellt nachstehende Tabelle wichtige algebraische Operationen auf der Menge der komplexen Zahlen und ihre geometrische Interpretationen zusammen:

Algebraische Operation	**Geometrische Interpretation**	**Explizites Beispiel**
Konjugation von $z = x + iy$: $\overline{z} = z^* = \mathrm{conj}(z) = x - iy$	**Spiegelung** von z an der reellen Achse	$z = 3 + 2i$ $\Rightarrow \overline{z} = 3 - 2i$
Multiplikation von z mit -1 zusammen mit Konjugation: $-\overline{z} = \overline{-z} = -x + iy$	**Spiegelung** von z an der imaginären Achse	$z = 3 + 2i$ $\Rightarrow -\overline{z} = -3 + 2i$
Addition von $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$	**Verkettung**/Hintereinanderlegen der Ortsvektoren von z_1 und z_2	$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$ $\Rightarrow z_1 + z_2 = 4 + i$
Betrag von $z = x + iy$: $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	**Abstand** von z zum Ursprung (Satz des Pythagoras)	$z = 3 + 2i$ $\Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{13}$
Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit i: $i \cdot z = i \cdot (x + iy) = -y + ix$ bzw. $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$	**Drehung** von z um 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$	$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\Rightarrow iz = -1 + i$ $\Rightarrow iz = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit -1: $-z = -(x + iy) = -x - iy$ bzw. $e^{i\pi} \cdot re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + \pi)}$	**Drehung** von z um 180° bzw. π	$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\Rightarrow -z = -1 - i$ $\Rightarrow -z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$
Multiplikation von $z, w \in \mathbb{C}$: $z = \lvert z\rvert \cdot e^{i\varphi_z}$, $w = \lvert w\rvert \cdot e^{i\varphi_w}$ $\Rightarrow z \cdot w = \lvert z\rvert \cdot \lvert w\rvert \cdot e^{i(\varphi_z + \varphi_w)}$	**Drehstreckung** von z: 1) Streckung von $\lvert z\rvert$ mit $\lvert w\rvert$ 2) Drehung von z um Winkel φ_w	$z = -1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $w = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\Rightarrow z \cdot w = 2e^{i\frac{6\pi}{4}} = -2i$
n-te Potenz von $z = \lvert z\rvert \cdot e^{i\varphi}$: $\Rightarrow z^n = \lvert z\rvert^n \cdot e^{i\varphi n}$	Spezielle **Drehstreckung** von z: 1) Streckung des Betrages auf $\lvert z\rvert^n$ 2) Ver-n-fachung des Winkels	$z = 1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $n = 18 \Rightarrow z^n = 2^9 e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $\Rightarrow (1 - i)^{18} = -512i$

3 Lineare Algebra

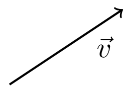
3.1 Vektoren

In der Anwendung, z.B. bei der Messung physikalischer Systeme, sind grundsätzlich **vektorielle** Größen und **skalare** Größen zu unterscheiden:

> Ein **Skalar** ist gegeben durch eine einzelne Zahl, z.B. Zeit, Masse, Temperatur, Energie, ...
>
> Ein **Vektor** ist gegeben durch eine positive Zahl und eine Richtung, z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Drehmoment, ...

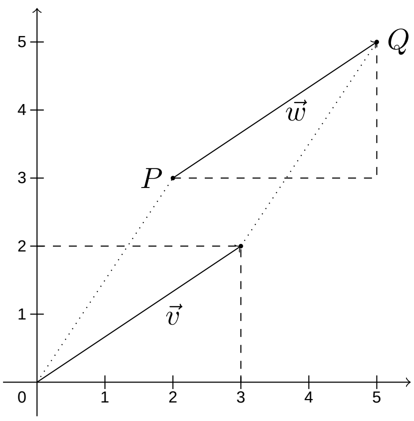
Zur Veranschaulichung eines Vektors dient der **Verschiebungspfeil**, der einen beliebigen Anfangspunkt (Fußpunkt) besitzt.

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie parallel und gleichlang sind und in die gleiche Richtung weisen.



Darstellung von Vektoren in der Ebene und im Raum

> **Ortsvektor**: Vektor, der von einem festen Startpunkt (dem Ursprung O des Koordinatensystems) aus definiert ist.
>
> **Verschiebungsvektor**: Entsteht durch Parallelverschiebung eines Ortsvektors (Verschiebungspfeil)
>
> **Verbindungsvektor**: Vektor zwischen zwei Punkten



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ortsvektor

Punkte P, Q : $\vec{v}_P = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_Q = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Verschiebungsvektor

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Verbindungsvektor der Punkte P und Q

$\Rightarrow$ Alle drei Vektoren sind identisch: $\vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{PQ}$

Für Vektoren in der (zweidimensionalen) Ebene gilt:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Für Vektoren des (dreidimensionalen) Raums gilt:

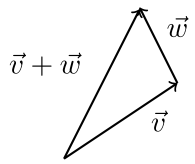
$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Für Vektoren in höherdimensionalen Räumen gilt:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

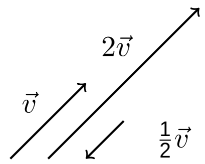
Die *Mengen* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ wurden bereits in Definition 1.5 als kartesisches Produkt eingeführt. Es stellt sich daher die Frage, was Tupel $x \in \mathbb{R}^n$ von Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ unterscheidet. Dazu betrachte man nochmals die Mengen $A = \{\text{schwarz, weiß}\}$ und $B = \{\text{Bauer, Läufer, Springer, Turm, Dame, König}\}$ sowie zwei Paare (2-Tupel) $x, y \in A \times B$; man betrachtet also zwei Figuren eines Schachspiels, z.B. $x = (\text{schwarz}, \text{Bauer})$ und $y = (\text{weiß}, \text{Läufer})$. Für diese Tupel ist es nicht möglich eine algebraische Operation wie etwa eine Addition vorzunehmen: Ausdrücke wie $x + y = (\text{schwarz}, \text{Bauer}) + (\text{weiß}, \text{Läufer}) = ?$ sind *nicht sinnvoll* und können nicht allgemein für ein kartesisches Produkt $A \times B$ mit beliebigen Mengen A und B definiert werden.
Anders verhält es sich bei Vektoren aus den *Vektorräumen* $\mathbb{R}^n$. Für diese sind Addition und Skalarmultiplikation *sinnvoll* und können geometrisch interpretiert werden. Es seien zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:

Addition
$\rightarrow$ komponentenweise Addition



$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar
$\rightarrow$ komponentenweise Multiplikation



$$\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Tupel und Vektoren unterscheiden sich also hinsichtlich ihrer algebraischen Struktur. Tupel sind nur Elemente einer Menge, Vektoren hingegen erlauben es, mit ihnen zu rechnen.

Definition 3.1 Ein **Vektorraum** über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$-Vektorraum) ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen, einer Addition $+$, die je zwei **Vektoren** $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ein Element $\vec{v} + \vec{w} \in V$ zuordnet, und einer Skalarmultiplikation $\cdot$, die jedem **Skalar** $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedem $\vec{v} \in V$ einen Vektor $\lambda \cdot \vec{v} \in V$ zuordnet, so dass für $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (Assoziativität von $+$)
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ (Kommutativität von $+$)
3. Es gibt ein Element $\vec{0} \in V$, so dass $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ (Existenz des neutralen Elements bzgl. $+$)
4. Zu jedem $\vec{v} \in V$ gibt es ein Element $-\vec{v} \in V$, so dass $\vec{v} + -\vec{v} = \vec{0}$ (Existenz inverser Elemente bzgl. $+$)
5. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
6. $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$
7. $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$
8. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$

Beispiel 3.1

(i) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum für alle $n \in \mathbb{N}$. Die komponentenweise Addition und skalare Multiplikation sind Funktionen auf dem Vektorraum. Für die Addition gilt:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$$

Für die skalare Multiplikation (Skalarmultiplikation) gilt:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\lambda, \vec{v}) \to \lambda \cdot \vec{v}$$

Bemerkung zur Notation: Oft ist es (aus dem Kontext heraus) klar, um welche Addition und Skalarmultiplikation es sich bei dem Vektorraum handelt. Daher schreibt man anstelle des vollständigen Vektorraums $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nur die zugrundeliegende Menge $V = \mathbb{R}^n$ und bezeichnet diese bereits als Vektorraum. Wie zuvor dargelegt, ist das streng genommen aber nur eine Menge (kartesisches Produkt) ohne algebraische Struktur. Wenn aus dem Kontext heraus klar ist, worum es geht, ist diese Vereinfachung aber aus Sicht der Notation und des Sprachgebrauchs vorteilhaft und weit verbreitet.

(ii) Sei $F = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ reelle Funktion}\}$ die Menge aller reellen Funktionen. Betrachte auf dieser Menge von Funktionen eine Addition $\oplus$ und Skalarmultiplikation $\odot$:

$$\oplus : F \times F \to F, \quad (f, g) \mapsto f \oplus g \qquad \text{d.h. } (f \oplus g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\odot : \mathbb{R} \times F \to F, \quad (\lambda, f) \mapsto \lambda \odot f \qquad \text{d.h. } (\lambda \odot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

Dann ist $(F, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Vektoren, d.h. die Elemente $v \in F$, sind in diesem Fall reelle Funktionen und werden daher eher mit f oder g als mit $\vec{v}$ bezeichnet. Eine Darstellung der Vektoren als Pfeile ist in diesem Fall nicht möglich bzw. wenig hilfreich. Man schreibt anstelle von $(F, \oplus, \odot)$ oft einfach $(F, +, \cdot)$ oder nur F.

Definition 3.2 Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Dann nennt man einen Vektor $\vec{v}$ der Form

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k$$

eine **Linearkombination** (Lk) der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. Die Menge

$$\mathrm{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\} \subset V$$

aller Linearkombinationen von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ heißt **Spann** oder **lineare Hülle** und ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man sagt: „Der Vektorraum wird von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ aufgespannt.“

Bemerkung zur Notation: In manchen Anwendungsbereiche (z.B. der Physik) werden Summen über das Produkt zweier Werte, $\sum_i a_i b_i$, oftmals *ohne das Summenzeichen* geschrieben. Dies ist eine *stark abkürzende Schreibweise* und darf nur dann verwendet werden, wenn die Summe aus dem Kontext heraus klar ist und keine Mehrdeutigkeiten entstehen.
Als Leser kann man ein „stummes Summenzeichen“ dadurch erkennen, dass Indizes auf einer Seite der Gleichung auftreten, auf der anderen aber nicht. Die Linearkombination würde in diese Schreibweise schlicht $\vec{v} = \lambda_i \vec{v}_i$ lauten.

Definition 3.3 Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ heißen **linear unabhängig** (l.u.), falls für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Gibt es hingegen Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle 0 sind, sodass $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$, dann heißen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ **linear abhängig** (l.a.).

Bemerkungen

- Mit anderen Worten: Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sind linear unabhängig, wenn aus ihnen der Nullvektor $\vec{0}$ nur trivial dargestellt werden kann.

- $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich ein Vektor $\vec{v}_i$ von ihnen als Linearkombination der restlichen $(k-1)$ Vektoren darstellen lässt.

  Begründung für die Richtung „$\Rightarrow$“: Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängig, so gibt es (mindestens) einen Index $1 \leq j \leq k$ mit $\lambda_j \neq 0$, aber $\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_j \vec{v}_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \vec{v}_i$. Da $\lambda_j \neq 0$ ist, kann der Vektor $\vec{v}_j$ dargestellt werden durch die restlichen $(k-1)$ Vektoren $\vec{v}_i$ mit $i \neq j$:

$$\vec{v}_j = \sum_{i \neq j} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right) \vec{v}_i$$

  Begründung für die Richtung „$\Leftarrow$“: Es lässt sich einer der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ durch die verbleibenden $(k-1)$ Vektoren als Linearkombination darstellen. Dies soll der letzte Vektor $\vec{v}_k$ sein (andernfalls werden die Vektoren umbenannt):

$$\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \vec{v}_i$$

  Damit findet man eine nicht-triviale Linearkombination der Null, denn:

$$(-1) \cdot \vec{v}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

  Da (mindestens) $\lambda_k \neq 0$ gilt, sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängig.

- Zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie skalare Vielfache voneinander sind, d.h. wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$. Damit folgt, dass der Nullvektor $\vec{0}$ stets linear abhängig ist.

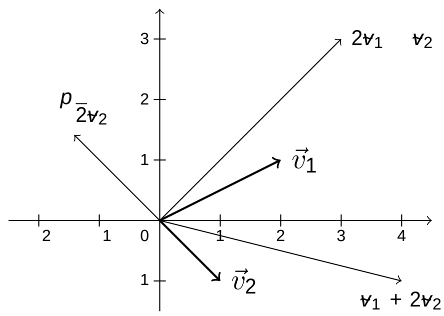
Beispiel 3.2 Betrachte im Folgenden $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Aus $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lassen sich Linearkombinationen bilden, etwa die drei nachstehenden Beispiele:

$$\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 2 \cdot \vec{v}_1 + (-1) \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 0 \cdot \vec{v}_1 + (-\sqrt{2}) \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



(ii) Sucht man die lineare Hülle von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, so kann man vermuten, dass sich mit den beiden Vektoren alle Elemente des $\mathbb{R}^2$ darstellen lassen.

Vermutung: $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathbb{R}^2$. Wie lässt sich diese Vermutung überprüfen?

Ansatz: Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ beliebig, d.h. $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Stellt man nun $\vec{v}$ als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ mit unbekannten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dar, so gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf zwei lineare Gleichungen für λ_1 und λ_2:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad x &\overset{!}{=} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{II)} \quad y &\overset{!}{=} \lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned}$$

Aus der Addition der beiden Bedingungsgleichungen erhält man

$$x + y = 2\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) = 3\lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{x+y}{3}$$

und damit (aus der zweiten Gleichung) auch einen Ausdruck für den zweiten Koeffizienten:

$$\lambda_2 = \frac{x - 2y}{3}$$

Damit ist die Vermutung $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathbb{R}^2$ bestätigt, denn λ_1, λ_2 kann für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ bestimmt werden. $\checkmark$

(iii) Aus der Rechnung von gerade eben folgt außerdem, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig sind, denn eine Darstellung des Nullvektors $\vec{v} = \vec{0}$ (d.h. $x = y = 0$) impliziert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Definition 3.4 Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Die Menge $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subset V$ von Vektoren ist eine **Basis** von V, wenn

1. sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ als Linearkombination der (Basis-)Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ darstellen lässt, d.h. $V = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, und
2. die (Basis-)Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängig sind.

Bemerkung

Die **kanonische Basis** (oder **kartesische Basis**) des $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_k$ $(k = 1, \dots, n)$, die nur an k-ten Komponente eine 1 und andernfalls eine 0 aufweisen:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 3.5

1. Jeder R-Vektorraum V hat eine Basis.

2. Sei V ein R-Vektorraum und $B = f\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k g$ eine Basis von V. Dann lässt sich jeder Vektor $\vec{v}\ 2\ V$ eindeutig schreiben als Linearkombination

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{v}_k$$

der Basisvektoren. Die Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ werden **Koordinaten** von $\vec{v}$ **bezüglich der Basis** B genannt. Den Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ nennt man **Koordinatenvektor** von $\vec{v}$ bezüglich B.

3. Sei $k\ 2$ N und $f\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k g$ eine Basis des Vektorraums V. Dann besteht jede Basis von V aus genau k Vektoren.

Beispiel 3.3 Im Folgenden werden zwei verschiedene Basen des Vektorraums R^2 diskutiert.

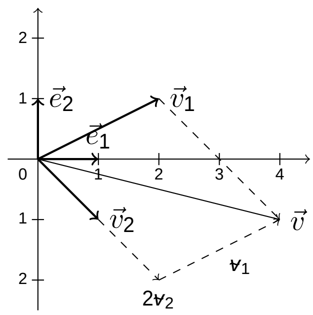
(i) Die beiden Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden die kanonische Basis des R^2, denn jeder Vektor $\vec{v}\ 2\ R^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ dargestellt werden, etwa

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ \ \ 1 \end{pmatrix} = 4 \ \ \vec{e}_1 + (\ \ 1)\ \ \vec{e}_2$$

Die beiden Koeffizienten $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = \ \ 1$ sind die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich der kanonischen Basis $B = f\vec{e}_1, \vec{e}_2 g$.

(ii) Aus den vorherigen Beispielen ist bereits eine weitere Basis des R^2 bekannt: $B^0 = f\vec{v}_1, \vec{v}_2 g$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \ \ 1 \end{pmatrix}$. Es wurde bereits nachgewiesen, dass sich jeder Vektor $\vec{v}\ 2\ R^2$ als Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ schreiben lässt. Zudem wurde gezeigt, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ \ \ 1 \end{pmatrix}$ ist bereits bekannt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ \ \ 1 \end{pmatrix}_B = 1 \ \ \vec{v}_1 + 2 \ \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B^0}$$



Das Umschreiben von $\vec{v}$ aus der einen (hier: kanonischen) Basis B in eine andere Basis B^0 wird als **Koordinatentransformation** bezeichnet.

Definition 3.6 Es sei V ein R-Vektorraum und $k\ 2$ N. Besteht eine (jede) Basis von V aus k Vektoren, so heißt k die **Dimension** des R-Vektorraums V: $\dim(V) = k$.

Bemerkungen

$\dim(R^n) = n$ für jedes $n\ 2$ N.

$\dim(f\vec{0}g) := 0$

Satz 3.7 Für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit $\dim(V) = k$ gilt: k Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ bilden genau dann eine Basis von V, wenn sie linear unabhängig sind.

Beispiel 3.4

(i) $B = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ ist die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ kann dargestellt werden als:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{e}_i$$

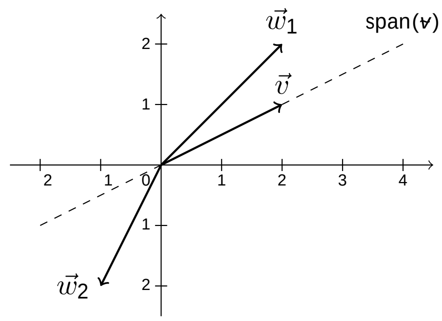
mit den (kanonischen) Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Es gilt: $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(ii) Bildet der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

$\Rightarrow$ Nein, da $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ist, enthält jede Basis des $\mathbb{R}^2$ genau zwei Vektoren.

Wie lässt sich $\vec{v}$ zu einer Basis ergänzen?
$\Rightarrow$ Jeder Vektor $\vec{w} \notin \operatorname{span}(\vec{v})$ ergänzt $\vec{v}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$, z.B.

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$



(iii) Bilden die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

$\Rightarrow$ Nein, denn $\vec{w} = -2 \cdot \vec{v}$, d.h. $\vec{v}, \vec{w}$ sind linear abhängig. Mit anderen Worten: $\vec{w} \in \operatorname{span}(\vec{v})$.

(iv) Bilden die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

$\Rightarrow$ Nein, denn drei Vektoren bilden niemals eine Basis eines zweidimensionalen Vektorraums. In $\mathbb{R}^2$ sind drei Vektoren stets linear abhängig. In diesem Fall gilt: $\vec{v}_3 = 3 \cdot \vec{v}_1 + (-2) \cdot \vec{v}_2$.

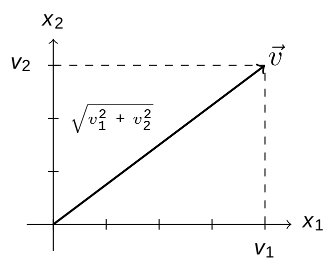
3.2 Skalar- und Vektorprodukt

Definition 3.8 Die Länge eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Betrag** oder **Norm** von $\vec{v}$ und ist gegeben als

$$|\vec{v}| := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}\,.$$

Bemerkungen

- Der Betrag/die Norm stellt den Satz des Pythagoras in n Dimensionen dar (siehe Skizze für $n = 2$)
- Vektoren mit $|\vec{v}| = 1$ nennt man **Einheitsvektoren**.
- Anstelle von $|\vec{v}|$ schreibt man manchmal auch $\|\vec{v}\|$.



Beispiel 3.5

(i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

(ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

(iii) Mit der Norm lässt sich auch der Abstand zweier Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ berechnen. Betrachte die Punkte $P = (-2|1)$ und $Q = (2|4)$, so erhält man für ihren Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und damit $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Definition 3.9 Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ihr **Skalarprodukt** ist definiert über die reellwertige Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

mit

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \,.$$

Beispiel 3.6 Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die kanonischen Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$.

(i) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$

(ii) $\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 1 = \vec{v} \cdot \vec{w}$

(iii) $\vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2^2 + 1^2 = 5,$ Es gilt: $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = 5$.

(iv) $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$

Es gilt allgemein: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ falls $i \neq j$ und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$.
Dies lässt sich mit dem **Kronecker-Delta** δ_{ij} kurz und elegant notieren als:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Satz 3.10 (Rechenregeln für Skalarprodukt und Norm) Für $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

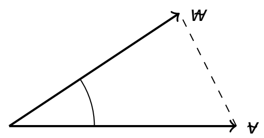
1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ (Kommutativität)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Distributivgesetz)
3. $(\lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{w}) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w})$ (slalare Multiplikation)

Es gilt speziell für die Norm eines Vektors:

4. $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
5. $|\vec{v}| \geq 0$ und $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
6. $|\lambda\vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{v}|$
7. $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$ (Dreiecksungleichung)
8. $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$ (Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung)

Satz 3.11 Für den **Winkel** $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen den Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gilt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right).$$



Man sagt, dass die Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ **orthogonal** sind oder **aufeinander senkrecht** stehen, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ist. In diesem Fall schreibt man $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Bemerkung: Die Beziehung zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel lässt sich über den **Kosinussatz** aus der Trigonometrie ableiten. Betrachte hier die Seitenlängen $a = |\vec{v}|$, $b = \vec{w}$ und $c = |\vec{w} - \vec{v}|$. Der Kosinussatz[1] besagt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

Betrachten man den Verbindungsvektors $\vec{v} - \vec{w}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} c^2 = |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= |\vec{v}|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 \\ &= a^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + b^2 \end{aligned}$$

Für den Kosinussatz bedeutet dies:

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + b^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha) \\ \Leftrightarrow \quad -2\vec{v} \cdot \vec{w} &= -2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha) \\ \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}, \quad \text{denn} \quad \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{v}|, |\vec{w}| \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &= \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right) \end{aligned}$$

[1] Für $\alpha = 90°$ wird die Seite c zur Hypotenuse und der Kosinussatz wird zum Satz des Pythagoras.

Definition 3.12 Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ eine Basis von V.
B heißt **Orthonormalbasis** (ONB) von V, wenn die Basisvektoren normiert und paarweise orthogonal sind, d.h. $|\vec{v}_i| = 1$ für $1 \leq i \leq k$ und $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ für $i \neq j$.

Bemerkung

Die obigen Bedingung an die Basisvektoren können mit dem **Kronecker-Delta** δ_{ij} kompakt geschrieben werden als: $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ paarweise orthogonal, dann sind sie linear unabhängig.

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ gegeben. Dann kann eine ONB des $\mathbb{R}^2$ konstruiert werden:

$$B_{\text{ONB}} = \left\{ \frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dies ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$, da für die Längen der Basisvektoren gilt:

$$\left| \frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$$
$$\left| \frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \sqrt{(-v_2)^2 + v_1^2} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$$

Ferner verschwindet ihr Skalarprodukt, d.h. der von ihnen eingeschlossene Winkel ist $90°$:

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{v}|^2} (v_1 \cdot (-v_2) + v_2 \cdot v_1) = 0$$

Beispiel 3.7 Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die kanonischen Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$.

(i) Die kanonische Basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis, denn $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

(ii) Im $\mathbb{R}^2$ bilden die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis, jedoch keine Orthonormalbasis, denn sie sind weder normiert, noch stehen sie aufeinander senkrecht:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad |\vec{w}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Ferner gilt für den von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingeschlossenen Winkel α:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \right) = \arccos\left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} \right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) \approx 71{,}6° \neq 90°$$

(iii) Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann Grundlage zur Konstruktion einer ONB des $\mathbb{R}^2$ sein. Es gilt $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, daher ist durch die folgende Menge eine ONB des $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$B_{\text{ONB}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Satz 3.13 Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine Orthonormalbasis von V, dann hat $\vec{v} \in V$ bezüglich B die Darstellung

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\vec{v} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} (\vec{v} \cdot \vec{v}_i)\vec{v}_i,$$

d.h. die Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von $\vec{v}$ bezüglich der Basis B sind für $1 \leq i \leq k$ durch die Skalarprodukte $\lambda_i = \vec{v} \cdot \vec{v}_i$ gegeben.

Beispiel 3.8 Betrachte die ONB B' des $\mathbb{R}^2$ aus dem vorangegangenen Beispiel:

$$B' = \left\{ \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

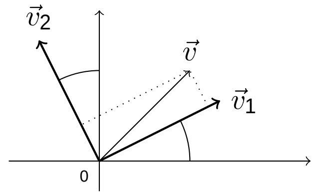
Möchte man den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ (gegeben in Koordinaten der kanonischen Basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$) in die neue Orthonormalbasis B' umschreiben, so ergeben sich die neuen Koordinaten als Skalarprodukte mit den ONB-Basisvektoren:

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$

mit

$$\lambda_1 = \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(6 \cdot 2 + 8 \cdot 1) = 4\sqrt{5}$$

$$\lambda_2 = \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(6 \cdot (-1) + 8 \cdot 2) = 2\sqrt{5}$$



Damit kann $\vec{v}$ in alter sowie neuer Basis geschrieben werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}_{B'}$$

Der Betrag des Vektors $\vec{v}$ ist (so wie es auch sein soll) in beiden Darstellungen identisch:

$$|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

oder mit den Koordinaten der Basis B':

$$|\vec{v}| = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{80 + 20} = 10$$

Definition 3.14 Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.
Das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist definiert als Abbildung

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{v} \times \vec{w} \end{aligned}$$

mit

$$\vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Das Vektorprodukt ist nur für Elemente des $\mathbb{R}^3$ definiert. Liegen Vektoren des $\mathbb{R}^2$ vor, so kann die fehlende Dimension durch Nullen aufgefüllt werden, d.h. vorliegende zweidimensionale Vektoren können wie folgt in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\vec{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Das resultierende Vektorprodukt besitzt verschwindende x- und y-Komponenten:

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\vec{v}} \times \hat{\vec{w}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Beispiel 3.9 Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die kanonischen Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$.

(i) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$

(iii) $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{e}_3$

(iv) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

(v) $\vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \vec{e}_1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

oder alternativ mit der Graßmann-Identität aus dem nachstehenden Satz:

$$\vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_3 = \vec{0}, \quad \text{denn es gilt: } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

(vi) Es gilt $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{v}$ und $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{w}$, da die beiden nachstehenden Skalarprodukte verschwinden:

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot 1 + 6 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 = -3 + 12 - 9 = 0 \quad \checkmark$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \cdot 4 + 6 \cdot 5 + (-3) \cdot 6 = -12 + 30 - 18 = 0 \quad \checkmark$$

Satz 3.15 (Rechenregeln für das Vektorprodukt) Für $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ (Antikommutativität)
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (Distributivgesetz)
3. $\lambda(\vec{v} \times \vec{w}) = (\lambda\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (\lambda\vec{w})$ (skalare Multiplikation)
4. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ (Graßmann-Identität)
5. $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.
6. $\vec{v} \times \vec{w}$ ist orthogonal zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$.
7. $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha)$, wobei α der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist.

Beispiel 3.10

(i) Um Orthogonalität zweier Vektoren nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass ihr Skalarprodukt verschwindet: $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{v}$ bzw. $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{w}$ ist also äquivalent zu $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$ bzw. $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$. Die allgemeine Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= (v_2w_3 - v_3w_2)v_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)v_3 \\ &= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2 + v_2v_3w_1 - v_1v_2w_3 + v_1v_3w_2 - v_2v_3w_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

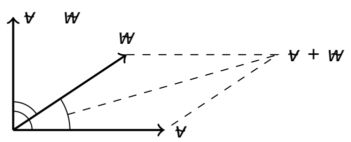
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} &= (v_2w_3 - v_3w_2)w_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)w_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)w_3 \\ &= v_2w_1w_3 - v_3w_1w_2 + v_3w_1w_2 - v_1w_2w_3 + v_1w_2w_3 - v_2w_1w_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

(ii) Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren in der x-y-Ebene. Das von den beiden aufgespannte Parallelogramm mit den Ecken $\vec{0}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} + \vec{w}$ besitzt den Flächeninhalt

$$A = |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha$$

Dabei ist α der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingeschlossene Winkel. Berechnet man die beiden Seiten dieser Gleichung unabhängig voneinander, so ergibt sich zunächst

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Damit gilt $A = |\vec{v} \times \vec{w}| = 3$. Für die rechte Seite der Gleichung benötigt man den eingeschlossenen Winkel:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Es gilt für $|x| \leq 1$ die Identität $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ (folgt aus dem Satz des Pythagoras), sodass für die rechte Seite folgt:

$$A = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \sqrt{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 3 \quad \checkmark$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts stellt nachstehende Tabelle die eingeführten Operationen auf Vektorräumen in einer kurzen Übersicht zusammen:

Operation	**Beschreibung der Operation**	**Bemerkung**
Vektoraddition	$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$	Hintereinanderlegen der Vektorpfeile
Skalarmultiplikation	$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\lambda, \vec{w}) \mapsto \lambda \cdot \vec{v}$	Skalierung des Vektorpfeils
Betrag/Norm	$\lvert\cdot\rvert : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\vec{v} \mapsto \lvert\vec{v}\rvert = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Länge des Vektors bzw. Abstand zum Ursprung
Skalarprodukt	$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$	Beziehung zum Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ (s.u.)
Vektorprodukt	$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$	nur für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$
Winkel zwischen zwei Vektoren	$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert}\right)$	Es gilt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert \cdot \cos\alpha$
Fläche des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms	$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ $A = \lvert\vec{v} \times \vec{w}\rvert = \lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert \cdot \sin(\alpha)$	Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ können in $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden

3.3 Matrizen

Definition 3.16 Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume mit einer Abbildung $f : V \to W$. Die Funktion f heißt **lineare Abbildung**, falls für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Bemerkungen

Eine lineare Abbildung heißt in der Literatur auch (Vektorraum-)**Homomorphismus**.

Die definierenden Bedingungen können zusammengefasst werden zu

$$f(\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Der **Kern** einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist der Vektorraum

$$\ker(f) := \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} \subseteq V$$

Das **Bild** einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist der Vektorraum

$$\mathrm{im}(f) := \{\vec{w} \in W \mid \vec{w} = f(\vec{x}) \text{ für ein } \vec{x} \in V\} \subseteq W$$

Beispiel 3.11

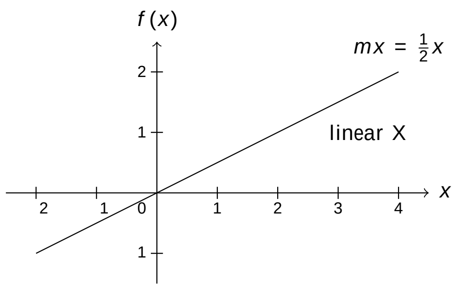
(i) Für den Vektorraum $V = W = \mathbb{R}$ ist jede lineare Abbildung gegeben durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = mx$ für ein $m \in \mathbb{R}$. Dies lässt sich direkt nachweisen, indem die definierenden Bedingungen geprüft werden:

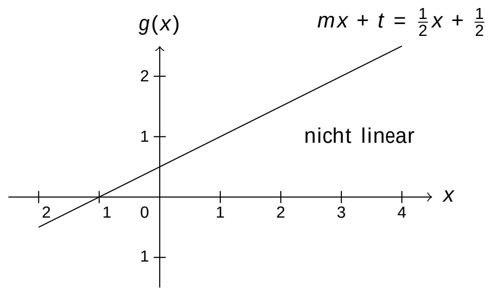
$$f(\lambda x + y) = m(\lambda x + y) = \lambda mx + my = \lambda f(x) + f(y) \quad \checkmark$$

Ein zusätzlicher Term $0 \neq t \in \mathbb{R}$, also $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = mx + t$, ist nicht erlaubt, da er die Linearität zerstört:

$$\begin{aligned} g(\lambda x + y) = m(\lambda x + y) + t = \lambda mx + my + t \neq \lambda g(x) + g(y) \\ = \lambda(mx + t) + my + t \\ = \lambda mx + \underbrace{\lambda t}_{\text{Störterm}} + my + t \end{aligned}$$

Die Linearität/Verletzung der Linearität zeigt sich in den Funktionsgraphen von f und g:





(ii) Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist nicht linear. Um dies zu begründen, genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden, für das die Linearität verletzt ist. Wähle zum Beispiel $\lambda = -2$ und $x = 3$:

$$|\lambda x| = |(-2) \cdot 3| = |-6| = 6 \neq \lambda |x| = (-2) \cdot |3| = -6$$

Es gilt allgemein für die Betragsfunktion:

$$|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \neq \lambda \cdot |x| \quad \text{für negative } \lambda < 0$$

(iii) Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1 - x_2$. f ist linear, denn

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) &= 2(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ &= 2\lambda x_1 + y_1 - \lambda x_2 - y_2 \\ &= \lambda(2x_1 - x_2) + (2y_1 - y_2) \\ &= \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Was ist der Kern der Abbildung f?

Nach Definition ist $\ker(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = 0\}$, d.h. alle $\vec{x} \in \ker(f)$ bilden auf die Null ab:

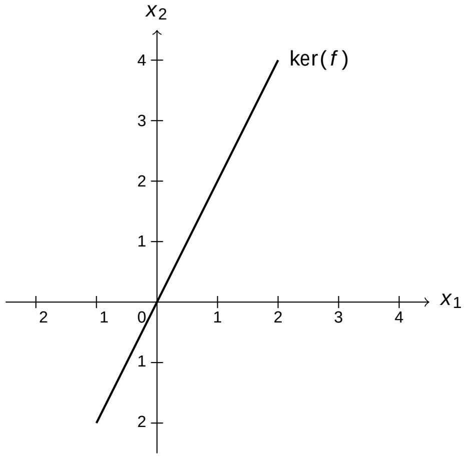
$$\vec{x} \in \ker(f) \Rightarrow f(\vec{x}) = 0$$

Man findet den Kern also mit folgendem Ansatz:

$$f(\vec{x}) = 2x_1 - x_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2x_1$$

Die Bedingung $x_2 = 2x_1$ ist für einen bestimmten Teil des Definitionsbereichs $\mathbb{R}^2$ von f erfüllt (siehe nebenstehende Skizze):

$$\ker(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 2x_1\right\}$$



Was ist das Bild der Abbildung f?

Nach Definition ist $\mathrm{im}(f) = \{w \in \mathbb{R} \mid w = f(\vec{x})$ für ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^2\}$, d.h. alle reellen Zahlen, die Ergebnis von $f(\vec{x})$ sein können. Es gilt: $w = f(\vec{x}) = 2x_1 - x_2$, wähle also z.B. $x_2 = 0$ und $x_1 = \frac{w}{2}$, für ein beliebiges $w \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(\vec{x}) = 2 \cdot \frac{w}{2} - 0 = w$. Da w beliebig gewählt war, gilt also $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$.

(iv) Betrachte die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(\vec{x}) = g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

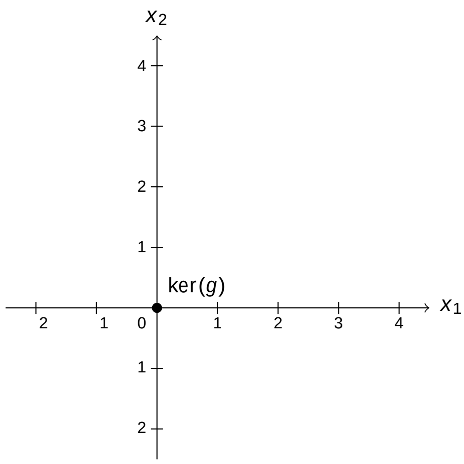
Was ist der Kern der Abbildung g?

Es ist $\ker(g) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, also:

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

Der Kern besteht also nur aus einem einzigen Vektor (siehe nebenstehende Skizze):

$$\ker(g) = \left\{\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$



Was ist das Bild der Abbildung g?

Es ist $\mathrm{im}(g) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid w = g(\vec{x})$ für ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^2\}$, also:

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt $x_1 = w_1$ und $x_2 = w_3$, womit $w_2 = x_1 + x_2 = w_1 + w_3$ festgelegt ist. Es können also *nicht alle* $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ erreicht werden, z.B.

$$\vec{w} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 \\ 42 \\ 42 \end{pmatrix}, \ldots \right\} \not\subseteq \mathrm{im}(g)$$

Es gilt:

$$g(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\mathrm{im}(g) = \left\{ \vec{w} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(v) Für den Vektorraum $V = W = \mathbb{R}^2$ ist jede lineare Abbildung gegeben durch vier Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

(vi) Für den Vektorraum $V = W = \mathbb{R}^3$ ist jede lineare Abbildung gegeben durch neun Koeffizienten $a_{ik} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, sodass

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

(vii) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x})$ ist vollständig gegeben durch die $m \times n$ Koeffizienten $a_{ik} \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, m$ (Zeilenindex) und $j = 1, \ldots, n$ (Spaltenindex):

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= \sum_{k=1}^{n} a_{2k} x_k = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ w_m &= \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Diese Koeffizienten lassen sich durch eine Matrix, die so genannte **Darstellungsmatrix** der linearen Abbildung f, darstellen.

Definition 3.17 Ein rechteckiges Zahlenschema von $m \quad n$ reeller Zahlen a_{ik} 2 R aus m Zeilen und n Spalten nennt man eine $m \quad n$-**Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

Die a_{ik} $(1 \quad i \quad m, 1 \quad k \quad n)$ heißen **Elemente** der Matrix.

Das Element a_{ik} steht in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte. Daher wird i auch Zeilenindex und k Spaltenindex genannt.

Die Menge aller reellen $m \quad n$-Matrizen wird mit $M(m \quad n)$ oder $M(m, n)$ bezeichnet.

A 2 $M(m, n)$ stellt eine lineare Abbildung f_A : R^n ! R^m dar.

Beispiel 3.12

(i) Für die lineare Abbildung f : R ! R, x 7! $f(x) = mx$ ist die Darstellungsmatrix eine einzelne Zahl: $A = \big(m\big)$ 2 R.

(ii) Für die allgemeine lineare Abbildung f : R^2 ! R^2, $\vec{x}$ 7! $\vec{w} = f(\vec{x})$ ist die Darstellungsmatrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(iii) Für die explizit gegebene lineare Abbildung f : R^3 ! R^3 mit $\vec{x}$ 7! $\vec{w} = f(\vec{x})$,

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 \quad 3x_2 \quad x_3 \\ w_2 &= 4x_1 \quad 2x_2 \\ w_3 &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

ergibt sich die Darstellungsmatrix zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iv) Gesucht ist im Folgenden die lineare Abbildung f, die zur Darstellungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gehört, sowie die Ergebnisse $f(\vec{x}), f(\vec{y}), f(\vec{z})$ zu $\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es gilt: Die zugehörige lineare Abbildung ist f : R^3 ! R^2 mit $\vec{w} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_2 \quad x_3 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$ und:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f(\vec{0}) &= \begin{pmatrix} 2 \; 0 \quad 0 \\ 3 \; 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ f(\vec{y}) &= \begin{pmatrix} 2 \; 2 \quad 3 \\ 3 \; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ f(\vec{z}) &= \begin{pmatrix} 2 \; 1 \quad 2 \\ 3 \; 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Diese Rechnung kann alternativ unter Nutzung der Matrixschreibweise durchgeführt werden. Für $\vec{y}$ etwa ergibt sich:

$$A\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = f(\vec{y}) \quad \mathsf{X}$$

(v) Gesucht ist die lineare Abbildung g zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, sowie $g(\vec{x})$ zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es gilt: Die zugehörige lineare Abbildung ist $g : \mathsf{R}^3 \;\; ! \;\; \mathsf{R}^3$ mit $\vec{w} = g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 5x_1 + x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$ und das Ergebnis $g(\vec{x})$ in Matrixschreibweise:

$$g(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \;\; 2+2 \;\; 3 \\ 5 \;\; 2+1 \;\; 1 \\ 3 \;\; 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Übersicht über spezielle Matrizen

Nullmatrix $0 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \; 2 \; M(m \quad n)$

Einheitsmatrix $E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \; 2 \; M(n \quad n)$

Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \; 2 \; M(n \quad n)$

obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \; 2 \; M(n \quad n)$

untere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \; 2 \; M(n \quad n)$

Ein **Spaltenvektor** $2 \; \mathsf{R}^m$ ist eine Matrix aus $M(m \quad 1)$

Ein **Zeilenvektor** $2 \; \mathsf{R}^n$ ist eine Matrix aus $M(1 \quad n)$

Definition 3.18 Seien $A = (a_{ik}), B = (b_{ik}) \in M(m \times n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die **Addition** ist definiert als

$$A + B := (a_{ik} + b_{ik}) \in M(m \times n)$$

Die **Skalarmultiplikation** ist definiert als

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ik}) \in M(m \times n)$$

Satz 3.19 Die Menge der $m \times n$-Matrizen $M(m \times n)$ zusammen mit der Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beispiel 3.13

(i) Die Addition von Matrizen erfolgt komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Für Matrizen aus unterschiedlichen Räumen ist die Addition nicht definiert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = ? \quad \to \text{ nicht definiert!}$$

(ii) Die Skalarmultiplikation von Matrizen erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Was passiert bei Verkettungen von linearen Funktionen?

Betrachte zwei lineare Abbildungen $f_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ und $f_2 = \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$. Im Folgenden soll deren Verkettung $f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ untersucht werden. Dabei wird der zweidimensionale Fall im Besonderen betrachtet ($m = r = n = 2$):
Da $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear sein sollen, besitzen Sie die Darstellungsmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Für $\vec{w} = f_1(\vec{x})$ und $\vec{w}' = f_2(\vec{w}) = f_2(f_1(\vec{x})) = (f_2 \circ f_1)(\vec{x})$ ist die Darstellungsmatrix für $f_2 \circ f_1$ (in Abhängigkeit der Parameter $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i = 1, 2$) gesucht:

$$\begin{aligned} \text{zunächst } f_1 \text{ mit } \vec{w} = f_1(\vec{x}) : \quad w_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 \\ w_2 &= c_1x_1 + d_1x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{danach } f_2 \text{ mit } \vec{w}' = f_2(\vec{w}) : \quad w'_1 &= a_2w_1 + b_2w_2 \\ w'_2 &= c_2w_1 + d_2w_2 \end{aligned}$$

Nutzt man die Ergebnisse w_1 und w_2 in Abhängigkeit von x_1 und x_2, so ergibt sich für $\vec{w}'$:

$$\begin{aligned} w'_1 &= a_2w_1 + b_2w_2 \overset{f_1}{=} a_2(a_1x_1 + b_1x_2) + b_2(c_1x_1 + d_1x_2) \\ &= (a_1a_2 + c_1b_2)x_1 + (b_1a_2 + d_1b_2)x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_2 &= c_2w_1 + d_2w_2 \overset{f_1}{=} c_2(a_1x_1 + b_1x_2) + d_2(c_1x_1 + d_1x_2) \\ &= (a_1c_2 + c_1d_2)x_1 + (b_1c_2 + d_1d_2)x_2 \end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix dieser linearen Abbildung $f_2 \quad f_1$ lautet

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + c_1b_2 & b_1a_2 + d_1b_2 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

Dies ist als Produkt der Matrizen A_2 und A_1 definiert, $A_{21} = A_2 \quad A_1$, woraus ersichtlich ist, dass die Multiplikation nicht kommutativ ist (ein Vertauschen der Indizes $1 \leftrightarrow 2$ führt zu einer anderen Darstellungsmatrix): $A_{12} = A_1 \quad A_2 \neq A_{21} = A_2 \quad A_1$

Definition 3.20 Seien $A = (a_{ik}) \in M(m \quad r)$ und $B = (b_{ik}) \in M(r \quad n)$.
Dann ist das **Matrizenprodukt** definiert als

$$A \quad B := (c_{ik}) \in M(m \quad n),$$

wobei

$$c_{ik} := a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{ir}b_{rk} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jk} \,.$$

<u>Interpretation</u>
Das Element c_{ik} in der Produktmatrix $A \quad B$ entspricht dem Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem k-ten Spaltenvektor von B.

Beispiel 3.14

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \quad 4 + 0 \quad 2 & 2 \quad 1 + 0 \quad 3 \\ 3 \quad 4 + 4 \quad 2 & 3 \quad 1 + 4 \quad 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = ? \quad \rightarrow$ nicht definiert!

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+4 & 1+0+0 & 2+0 \quad 2 \\ 0+1+0 & 5+1+0 & 10+3+0 \\ 0+0+6 & 0+0+0 & 0+0 \quad 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 13 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) Multiplikation mit der Einheitsmatrix E_n gibt nur die eingehende Matrix A zurück, z.B.

$$A \quad E_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \quad 1 + b \quad 0 & a \quad 0 + b \quad 1 \\ c \quad 1 + d \quad 0 & c \quad 0 + d \quad 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$$E_2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \quad a + 0 \quad c & 1 \quad b + 0 \quad d \\ 0 \quad a + 1 \quad c & 0 \quad b + 1 \quad d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

(v) Multiplikation mit der Nullmatrix ergibt stets die Nullmatrix: $A \quad 0 = 0 \quad A = 0$

(vi) Wie bereits zuvor anhand der Indizes festgestellt, ist die Matrixmultiplikation nicht kommutativ:

$$A \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \neq B \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$$

Übersetzt man $A \quad B \neq B \quad A$ zurück in die Sprache der den Darstellungsmatrizen A und B zugrundeliegenden Abbildungen, so liest sich die Nicht-Kommutativität der Matrixmultiplikation als $f_A \quad f_B \neq f_B \quad f_A$. Dies wurde bereits in Grundlagenkapitel 1 untersucht.

Satz 3.21 (Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation) Für Matrizen A, B, C und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativität)
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Distributivgesetzt (1))
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (Distributivgesetzt (2))
4. $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$ (skalare Multiplikation)
5. Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. es gilt im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Definition 3.22

Für $A = (a_{ik}) \in M(m \times n)$ ist die **Transponierte** definiert als

$$A^\top := (a_{ki}) \in M(n \times m).$$

Die Transponierte von A entsteht also aus A, indem man Zeilen und Spalten vertauscht. Sie ist eine Abbildung $\top : M(m \times n) \to M(n \times m)$.

$A \in M(n \times n)$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^\top$.

$A \in M(n \times n)$ heißt **orthogonal**, wenn $A \cdot A^\top = E_n$.

Bemerkung
Eine Matrix $A \in M(n \times n)$ ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten- bzw. die Zeilenvektoren von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Beispiel 3.15

(i) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

(iii) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$, d.h. Spaltenvektoren $\leftrightarrow$ Zeilenvektoren

Damit lässt sich das Skalarprodukt in Matrixschreibweise neu verstehen: Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\text{Skalarprodukt:} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{k=1}^{n} v_i w_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{Matrixschreibweise:} \quad \vec{v}^\top \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k w_k \right) \in M(1,1) = \mathbb{R}$$

Beachte: Das Rechensymbol $\cdot$ bezeichnet in den Schreibweisen unterschiedliche Operationen.

(iv) Wir kennen bereits eine Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{R}^2$:

$$B_{\text{ONB}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Schreibt man die beiden Basisvektoren spaltenweise in eine Matrix A, so ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
A^\top \cdot A &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \\
A \cdot A^\top &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = E_2
\end{aligned}
$$

Aufgrund dieser Eigenschaft(en) wird die Matrix A als orthogonale Matrix bezeichnet.

(v) Betrachtet man $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(AB)^\top &= \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \\
(AB)^\top \neq A^\top B^\top &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \\
(AB)^\top = B^\top A^\top &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Satz 3.23 Für Matrizen A, B und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(A^\top)^\top = A$ (Transposition als Involution)
2. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ (Linearität der Transposition (1))
3. $(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top$ (Linearität der Transposition (2))
4. $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$

Bemerkung
Die Transposition eines Produkts mit mehreren Faktoren kehrt die Reihenfolge der (transponierten) Faktoren um:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^\top = A_n^\top \cdot \ldots \cdot A_2^\top \cdot A_1^\top$$

$\boxed{\text{Wann lässt sich eine Matrix/lineare Abbildung umkehren?}}$

Betrachte eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto \vec{w} = f(\vec{x})$. Gesucht ist $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzw. im Vorfeld eine Antwort auf die Frage, ob sich f überhaupt umkehren lässt.

Betrachte für den **zweidimensionalen Fall** $n = 2$ eine allgemeine linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
\text{I)} \quad w_1 &= ax_1 + bx_2 \\
\text{II)} \quad w_2 &= cx_1 + dx_2
\end{aligned}
\qquad \text{mit Darstellungsmatrix } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

Um die Umkehrfunktion von f zu bestimmen, muss man für gegebenes $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ nach den Komponenten von $\vec{x}$ auflösen. Aus I) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{w_1 - bx_2}{a} \quad \text{in II)} \\
\Rightarrow \quad w_2 &= c \cdot \frac{w_1 - bx_2}{a} + dx_2 = \frac{c}{a} w_1 + \left(-\frac{cb}{a} + d \right) x_2
\end{aligned}
$$

also für die gesuchten Komponenten von $\vec{x}$:

$$\Rightarrow\ x_2 = \frac{w_2 - \frac{c}{a}w_1}{d - \frac{cb}{a}} = \frac{aw_2 - cw_1}{ad - bc}$$

$$\Rightarrow\ x_1 = \frac{w_1}{a} - \frac{b}{a}x_2 = \frac{w_1}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{aw_2 - cw_1}{ad - bc}\right) = \frac{-bw_2 + dw_1}{ad - bc}$$

Dies lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \text{I)}\quad x_1 &= \frac{d}{ad-bc}w_1 - \frac{b}{ad-bc}w_2 \\ \text{II)}\quad x_2 &= -\frac{c}{ad-bc}w_1 + \frac{a}{ad-bc}w_2 \end{aligned} \qquad \text{mit Darstellungsmatrix } B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aufgrund der durchgeführten Rechnung stellt B die inverse lineare Abbildung von f dar. Zum Testen dieser Eigenschaft setzt man mit den Darstellungsmatrizen an:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Für alle linearen Abbildungen f mit $ad - bc \neq 0$ folgt also die inverse Darstellungsmatrix:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Definition 3.24 Falls es zu $A \in M(n \times n)$ ein $B \in M(n \times n)$ gibt mit

$$AB = BA = E_n,$$

dann nennt man A **invertierbar** und B heißt die zu A **inverse Matrix**. Sie wird mit $B = A^{-1}$ bezeichnet.

Sonderfälle von inversen Matrizen

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$ mit $ad - bc \neq 0$ ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Der inverse Vorfaktor $ad - bc$ wird als Determinante der zweidimensionalen Matrix A bezeichnet (siehe nachstehende Definition 3.25).

Eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$ ist invertierbar, wenn alle Diagonalelemente d_{ii} ungleich Null sind. Die Inverse von D ist dann gegeben durch

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung

Die Berechnung sowie Kriterien für die Existenz von inversen Matrizen werden im Folgenden entwickelt. Ein wesentlicher Begriff auf diesem Weg ist der der Determinante, welcher sofort im Anschluss eingeführt wird. Determinanten werden zusammen mit inversen Matrizen auch im nachfolgende Abschnitt 3.4 zu linearen Gleichungssystemen eine zentrale Rolle spielen.

Definition 3.25 Für $A\ 2\ M(2\quad 2)$ ist die **Determinante** von A definiert als

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} \quad a_{21}a_{12}.$$

Für $A\ 2\ M(3\quad 3)$ ist die **Determinante** von A definiert als (Regel von Sarrus)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} \quad a_{11}a_{23}a_{32} \quad a_{12}a_{21}a_{33}$$

Für beliebiges $n\ 2\ \mathsf{N}$ ist die **Determinante** von $A = (a_{ik})\ 2\ M(n\quad n)$ definiert mit Hilfe des **Laplaceschen Entwicklungssatzes**:

Entwicklung entweder nach der k-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (\quad 1)^{i+k} a_{ik}\ \det(\hat{A}_{ik})$$

oder Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (\quad 1)^{i+k} a_{ik}\ \det(\hat{A}_{ik}).$$

Dabei ist $\hat{A}_{ik}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

Beispiel 3.16

(i) Für die Determinanten von $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} \ \ 2 & \ \ 4 \\ \ \ 3 & \ \ 6 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4\ \ 3 \quad 2\ \ 1 = 12 \\ \det(B) &= 2\ \ 4 \quad 3\ \ 0 = 8 \\ \det(C) &= \quad 2\ \ 6 \quad (\ \ 3)\ \ (\ \ 4) = 0 \end{aligned}$$

(ii) Für Determinanten von $3\quad 3$-Matrizen kann folgendes Rechenschema hilfreich sein: Man erweitert die Darstellungsmatrix rechts um die linke und mittlere Spalte und berechnen anschließend je drei Produkte mit positiven bzw. negativen Vorzeichen:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad a_{13}a_{22}a_{31} \quad a_{11}a_{23}a_{32} \quad a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel: $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & \ \ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1\ \ 3\ \ 2 + 0 \quad 2\ \ 1\ \ 2 \quad 0 \quad (\ \ 1)\ \ 1\ \ 1 = 3$

(iii) Determinanten von Matrizen höherer Dimension sind mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz auf niederdimensionale Determinanten zurückzuführen. Allgemein gilt, dass sich eine Determinante von $A \in M(n,n)$ als Summe von n Determinanten der Matrizen $\hat{A}_{ik} \in M(n-1,n-1)$ entwickeln lässt. Dabei ist es geschickt, die Zeile oder Spalte auszuwählen, für die möglichst viele Nullen als Vorfaktoren der neu zu berechnenden Determinanten auftreten.
Für das nachstehende Beispiel ist dies für die dritte Zeile der Fall, sodass von den potentiell vier dreidimensionalen Determinanten nur zwei berechnet werden müssen:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2^+ & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 1 \\ 3^+ & 0 & 0^+ & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} &= 3\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} - 0 + 0 - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 3\cdot(48+15+0-0-18-30) - 1\cdot(36+24+60-15-48-72) \\
&= 3\cdot 15 - (-15) = 60
\end{aligned}$$

Die in der 4×4-Matrix hochgestellten Vorzeichen geben die für die Entwicklung notwendigen Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ an, wobei i den Zeilenindex und k den Spaltenindex bezeichnet.

Bemerkungen zu Determinanten, $A, B \in M(n,n)$

- $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $\det(\lambda\cdot A) = \lambda^n\cdot\det(A)$

Die nachstehenden Aussagen gelten analog für Spalten anstelle von Zeilen:

- $\det(A) = 0$, wenn eine Zeile von A eine Linearkombination von anderen Zeilen von A ist.
- Bei Vertauschung von zwei Zeilen ändert sich nur das Vorzeichen der Determinante.
- Werden die Elemente einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, so wird auch der Determinantenwert mit λ multipliziert.
- Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert.
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix entspricht dem Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Definition 3.26 Sei $A \in M(m\times n)$. Die Dimension des von den Spalten-/Zeilenvektoren von A aufgespannten Vektorraums heißt **Rang** von A. Schreibweise: $\mathrm{Rg}(A)$.

Bemerkungen

- Der Rang von A ist gleich der maximalen Zahl linear unabhängiger Spalten- bzw. Zeilenvektoren von A.
- Für $A \in M(m\times n)$ ist $\mathrm{Rg}(A) \leq \min\{m,n\}$.

Satz 3.27 Für $A \in M(n\times n)$ gilt:

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rg}(A) = n$$

Bemerkung: Man sagt, dass A den **vollen Rang** hat, wenn $\mathrm{Rg}(A) = n$ gilt.

Beispiel 3.17

(i) $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, denn aufgrund von 4 Spalten und 2 Zeilen gilt: $\mathrm{Rg}(A) \quad 2$.

Es lassen sich aber in der Tat zwei linear unabhängige Spalten finden, z.B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ebenfalls sind die beiden Zeilen von A linear unabhängig.

(ii) $\mathrm{Rg}(B) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, denn aufgrund von 3 Spalten und 4 Zeilen gilt: $\mathrm{Rg}(B) \quad 3$.

Anders als im vorherigen Beispiel der Matrix A gilt für B allerdings:

$$\begin{aligned} 3.\text{ Spalte } &= 1.\text{ Spalte } \quad 2.\text{ Spalte} \\ 3.\text{ Zeile } &= 1.\text{ Zeile } + 2.\text{ Zeile} \\ 4.\text{ Zeile } &= 1.\text{ Zeile } \quad 2.\text{ Zeile} \end{aligned}$$

Es sind maximal zwei unabhängige Zeilen und Spalten in der Matrix B zu finden, d.h. $\mathrm{Rg}(B) = 2$.

(iii) Die nachstehende Matrix $A \in M(5,5)$ hat vollen Rang, $\mathrm{Rg}(A) = 5$, da $\det(A) \neq 0$ gilt. Dies ergibt sich durch Entwicklung z.B. nach der vierten Spalte. Damit ergibt sich nur eine einzige niederdimensionale Determinante, die man berechnen muss:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3^+ & 2 & 3^+ & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0^+ & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0^+ & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 \quad 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \quad 0$$

Entwickelt man hier nun nach der ersten Spalte, so ergibt sich:

$$3 \begin{vmatrix} 3^+ & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0^+ & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \quad 3 \left(3 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}}_{= \quad 3} \quad (\quad 1) \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}}_{=33} + 0 \quad (\quad 1) \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{= \quad 27} \right)$$

$$= (\quad 3) \quad \Big(3 \quad (\quad 3) + 33 + 0 + (\quad 27) \Big) = (\quad 3) \quad (\quad 3) = 9 \neq 0$$

3.4 Lineare Gleichungssysteme

Typische Fragestellungen, die zu einem linearen Gleichungssystem führen, lauteten wie folgt: Für vier Vektoren des R^4,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

betrachtet man den von ihnen aufgespannten Vektorraum $V = \mathrm{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.

1. Was ist $\dim(V)$?
2. Gilt $\vec{x}, \vec{y} \in V$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\top$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}^\top$?
3. Was ist eine mögliche Basis von V?

Zur ersten Fragestellung: Zunächst werden die vier Vektoren auf lineare Abhängigkeit hin überprüft: $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4$ sind linear abhängig, falls der Nullvektor $\vec{0}$ aus ihnen nicht-trivial linear kombiniert werden kann, d.h.

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 = \vec{0}$$

für (mindestens) ein $\lambda_i \neq 0$. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem in vier Variablen:

$$\begin{array}{rl}
\text{I)} & 1\ \ \lambda_1 \quad 1\ \ \lambda_2 + 2\ \ \lambda_3 + 0\ \ \lambda_4 = 0 \\
\text{II)} & 1\ \ \lambda_1 + 2\ \ \lambda_2 + 1\ \ \lambda_3 \quad 1\ \ \lambda_4 = 0 \\
\text{III)} & \quad 1\ \ \lambda_1 \quad 1\ \ \lambda_2 + 0\ \ \lambda_3 + 2\ \ \lambda_4 = 0 \\
\text{IV)} & \quad 2\ \ \lambda_1 + 1\ \ \lambda_2 + 3\ \ \lambda_3 + 7\ \ \lambda_4 = 0
\end{array}$$

Dies lässt sich in Matrixschreibweise, $A \ \vec{\lambda} = \vec{b}$, darstellen durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abstrahiert man weiter, so ist die Darstellung des Vektors $\vec{\lambda}$ für die Notation irrelevant, sodass dieser in der sog. erweiterten Koeffizientenmatrix unterdrückt wird. Obiges System an Gleichungen wird kompakt geschrieben als:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Nach der Vorstellung des Gauß-Algorithmus werden wir auf die erste Fragestellung zurückkommen.

Definition 3.28 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ besteht aus m linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

wobei $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. Ein n-Tupel $(c_1, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ heißt eine **Lösung** dieses linearen Gleichungssystems, falls es alle m linearen Gleichungen löst, also

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + \ldots + a_{1n}c_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}c_1 + \ldots + a_{mn}c_n &= b_m \end{aligned}$$

Die Gesamtheit aller Lösungen heißt **Lösungsmenge** des linearen Gleichungssystems.

Mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n)$ und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ sowie $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ lautet das LGS in Matrixschreibweise: $A\vec{x} = \vec{b}$

Bemerkungen

Die Matrix $(A|\vec{b}) \in M(m \times (n+1))$ nennt man **erweiterte Koeffizientenmatrix**.

Ein LGS heißt **homogen**, wenn $\vec{b} = \vec{0}$ ist, sonst heißt es **inhomogen**.

Zwei LGS mit der selben Lösungsmenge heißen **äquivalent**.

Idee des Gauß-Algorithmus

Forme das LGS in ein äquivalentes LGS um, bei dem die Lösungsmenge rechnerisch leicht bestimmt werden kann.

Satz 3.29 Die Lösungsmenge eines LGS bleibt unverändert, wenn man in der erweiterten Koeffizientenmatrix

1. zwei Zeilen vertauscht,
2. eine Zeile mit einem $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multipliziert,
3. das λ-fache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Wenn also die erweiterten Koeffizientenmatrizen von zwei LGS durch elementare Zeilenumformungen aus dem oben stehenden Satz ineinander übergeführt werden können, dann sind die beiden LGS äquivalent.

Definition 3.30 Eine Matrix hat **Zeilenstufenform**, wenn jede Nichtnullzeile mehr Anfangsnullen hat als die vorherige Zeile und alle Zeilen, die ausschließlich Nullen enthalten, am Ende der Matrix stehen:

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \boxed{*} & & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{*} & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(steht dabei für eine beliebige reelle Zahl, $\boxed{*}$ für eine Zahl ungleich Null)

Der erste Eintrag $\boxed{*}$ ungleich Null in jeder Zeile wird **Pivot-Element** genannt. Spalten mit einem Pivot-Element heißen **Pivot-Spalten**.

Eine Matrix hat **normierte / reduzierte Zeilenstufenform**, wenn sie Zeilenstufenform hat, alle Pivot-Elemente gleich 1 sind und oberhalb jedes Pivot-Elements nur Nullen stehen:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & & \cdots & 0 & \cdots & \\ 0 & \boxed{1} & & \cdots & 0 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(steht dabei für eine beliebige reelle Zahl)

Lösungsverfahren: Gauß-Algorithmus

Ausgangspunkt: Erweiterte Koeffizientenmatrix $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

1. Schritt

Falls $a_{11} \neq 0$, dann subtrahiert man für $2 \leq i \leq m$ das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile von der i-ten Zeile. Dadurch wird in der ersten Spalte in den Zeilen 2 bis m eine Null erzeugt (d.h. die Variable, die der ersten Spalte zugeordnet ist, wird in den Zeilen 2 bis m eliminiert).

Falls $a_{11} = 0$, aber das erste Element einer anderen Zeile $i \neq 1$ ungleich Null, dann vertauscht man die i-te Zeile mit der ersten Zeile und verfährt mit der neuen Matrix wie oben.

Falls die erste Spalte nur aus Nullen besteht, dann verfährt man wie oben mit a_{12} statt a_{11}. Falls auch die zweite Spalte nur aus Nullen besteht, dann betrachtet man die dritte Spalte etc.

Ergebnis des 1.Schritts

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right)$$

(evtl. mit zusätzlichen Nullspalten links)

2. Schritt Man wendet das Vorgehen des 1. Schritts auf folgende Teilmatrix an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{m2} & \ldots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right)$$

Nach endlich vielen Schritten hat man die erweiterte Koeffizientenmatrix in folgende Form transformiert (Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix):

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \boxed{*} & & & \ldots & & \ldots & & & b_1 \\ 0 & \boxed{*} & & \ldots & & \ldots & & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \boxed{*} & \ldots & & & b_k \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & 0 & b_{k+1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & 0 & b_m \end{array}\right)$$

Die bisherigen Schritte des Gauß-Algorithmus werden „**Vorwärtsphase**“ genannt.
Es gibt drei mögliche Ergebnisse der Vorwärtsphase

1. $b_{k+1} = \ldots = b_m = 0$ und $k = n$
   $\Rightarrow$ Das LGS hat genau eine Lösung, die durch Rückwärtseinsetzen ermittelt werden kann.

2. $b_{k+1} = \ldots = b_m = 0$ und $k < n$
   $\Rightarrow$ Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Man kann die Variablen, die den Spalten ohne Pivotelement zugeordnet sind (freie Variablen), beliebig vorgeben.

3. Es gibt ein $i \in \{k+1, \ldots, m\}$ mit $b_i \neq 0$
   $\Rightarrow$ Das LGS hat keine Lösung.

In der sogenannten „**Rückwärtsphase**“ des Gauß-Algorithmus kann durch elementare Zeilenumformungen noch erreicht werden, dass alle Pivot-Elemente gleich 1 sind und oberhalb der Pivot-Elemente nur Nullen stehen (normierte Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix). Im Falle der eindeutigen Lösbarkeit des LGS kann man die Lösung dann direkt ablesen.

<u>zurück zur ersten Fragestellung</u>: Das vorliegende Gleichungssystem soll mithilfe des Gauß-Algorithmus gelöst werden. Im ersten Schritt werden unterhalb des Pivot-Elements der ersten Zeile (1) Nullen erzeugt, indem Vielfache der ersten Zeile auf die Zeilen zwei bis vier addiert bzw. subtrahiert werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Ein Vertauschen der zweiten und vierten Zeile führt wiederum auf ein äquivalentes LGS, zusätzlich wird das Vorzeichen in der nun neuen zweiten Zeile gedreht, sodass wiederum 1 als Pivot-Element auftritt. Unter diesem werden durch Addition/Subtraktion von Zeilen wieder Nullelemente erzeugt:

$$\dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Darstellung entspricht der Zeilenstufenform, dem Ende der Vorwärtsphase. Die erweiterte Koeffizientenmatrix enthält drei Pivot-Elemente (stets 1) sowie eine Nullzeile.
Nun startet die Rückwärtsphase, die zum Ziel hat, alle Pivot-Elemente auf 1 zu normieren (in diesem Beispiel bereits geschehen) und Nullen auch oberhalb der Pivot-Elemente zu erzeugen. Dies erreicht man wieder durch sukzessive Addition/Subtraktion von Zeilen:

$$\dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Darstellung entspricht der normierten Zeilenstufenform, dem Ende der Rückwärtsphase und des gesamten Gauß-Algorithmus.

Was bedeutet dieses Ergebnis für die Lösungsmenge L des homogenen Gleichungssystems $A\ \vec{\lambda} = \vec{0}$?

Die letzte Zeile ist eine Nullzeile, weshalb ein Parameter frei gewählt werden darf: $\lambda_4 = c \in \mathbb{R}$

Aus der dritten Zeile folgt: $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$, also $\lambda_3 = \quad c$

Aus der zweiten Zeile folgt: $\lambda_2 = 0$

Aus der ersten Zeile folgt: $\lambda_1 \quad 2\lambda_4 = 0$, also $\lambda_1 = 2c$

Für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ ist also jeder Vektor $\vec{\lambda}_c = \begin{pmatrix} 2c \\ 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}$ eine Lösung des LGS. Die Lösungsmenge

L ergibt sich zu

$$L = \text{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Die vier Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_4$ sind also linear abhängig und es gilt: $\dim(V) = 3$, was der Anzahl der Nicht-Nullzeilen, d.h. der Anzahl der Pivot-Elemente, der (normierten) Zeilenstufenform entspricht. Dies lässt sich auch durch $\text{Rg}(A) = 3$ ausdrücken.

Es gilt ferner, dass L all diejenigen Vektoren beschreibt, die durch die Koeffizientenmatrix A auf den Nullvektor $\vec{0}$ abgebildet werden. Dies stellt den Kern der linearen Abbildung bzw. der Matrix A dar: $\ker(A) = L$. Allgemein kann der Kern einer Matrix also bestimmt werden, in dem der Gauß-Algorithmus für das zugehörige homogene LGS durchgeführt wird.

Zweite Fragestellung: Für die oben angegebenen zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist gefragt, ob $\vec{x}, \vec{y}$ 2 V gilt. Damit wird gefragt, ob die beiden Vektoren im Bild der durch die Koeffizientenmatrix A gegebenen linearen Abbildung liegen: $\vec{x}, \vec{y}$ 2 $V = \text{im}(A)$. Anstelle des homogenen LGS wird der Gauß-Algorithmus mit $\vec{x}$ bzw. $\vec{y}$ auf der rechten Seite ausgeführt. Die Schritte des Gauß-Algorithmus bleiben unverändert, einzig die rechte Seite muss neu berechnet werden. Die Vorwärtsphase mit den rechts ergänzten Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ergibt:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{ 99K } \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} & 0 \end{array}\right)$$

Die vierte Zeile wird wieder zu einer Nullzeile, jedoch ist die letzte Koordinate des modifizierten Vektors $\vec{x}$ ungleich Null, $\frac{1}{30}$ 6= 0, weshalb diese Bedingung nicht erfüllt werden kann. Es folgt: $\vec{x}$ 2 V.

Für die Rückwärtsphase wird nun ausschließlich mit dem (modifizierten) Vektor $\vec{y}$ weiter gerechnet:

$$\text{99K } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ 99K } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine Lösung lässt sich in dieser normierten Zeilenstufenform auf der rechten Seite direkt ablesen. Man erhält ***alle*** Lösungen wiederum durch systematisches Auswerten des Ergebnisses:

Die letzte Zeile ist eine Nullzeile, weshalb ein Parameter frei gewählt werden darf: $\lambda_4 = c$ 2 R

Aus der dritten Zeile folgt: $\lambda_3 + \lambda_4 = 1$, also $\lambda_3 = 1 \quad \lambda_4 = 1 \quad c$

Aus der zweiten Zeile folgt: $\lambda_2 = \quad 3$

Aus der ersten Zeile folgt: $\lambda_1 \quad 2\lambda_4 = 1$, also $\lambda_1 = 1 + 2c$

Damit ist die Gleichung $A \quad \vec{\lambda} = \vec{y}$ erfüllt für alle

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 + 2c \\ 3 \\ 1 \quad c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der erste Teil dieser Lösung ist die Lösung, die sich direkt aus der normierten Zeilenstufenform ablesen lässt, die sogenannte ***spezielle Lösung***. Den von c abhängigen Teil der Lösung kennen wir bereits als Lösungsmenge des homogenen LGS, $L = \ker(A)$, die sogenannte ***allgemeine Lösung***.

Satz 3.31

1. Ein inhomogenes LGS hat entweder keine Lösung oder genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

2. Ein homogenes LGS hat entweder genau eine Lösung (nämlich $\vec{0}$) oder unendlich viele Lösungen.

3. Falls das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist, dann ist die Lösungsmenge L gegeben als

$$L = \{\vec{x}_s + \vec{x} \mid \vec{x} \in L_0\},$$

wobei $\vec{x}_s$ eine spezielle Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und L_0 die Lösungsmenge des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ ist.

Bemerkungen

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

Falls die Matrix C in Zeilenstufenform ist, dann ist $\mathrm{Rg}(C)$ gleich der Anzahl der Nichtnullzeilen von C (Anzahl der Pivotelemente von C).

$A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|\vec{b})$.

Dritte Fragestellung: Was ist eine mögliche Basis für den Vektorraum V?
Wir haben gesehen, dass die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \quad \vec{\lambda} = \vec{0}$ gegeben ist durch

$$L = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \ \ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Die zweite Koordinate zeigt an, dass der Vektor $\vec{v}_2$ in jedem Fall den Vorfaktor Null besitzen muss, um den Nullvektor $\vec{0}$ linear zu kombinieren. Daher ist $\vec{v}_2$ in jedem Fall Teil der gesuchten Basis. Die anderen drei Vektoren sind linear abhängig: $2\vec{v}_1 \quad \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$. Da $\mathrm{Rg}(A) = 3$ ist, sind zwei weitere Basisvektoren zu bestimmen:

(i) Entfernt man den Vektor $\vec{v}_1$, so erhält man:

$$B_1 = \{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} \ \ 1 \\ 2 \\ \ \ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \ \ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Die beiden Vektoren $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ sind linear unabhängig, da nicht kollinear (siehe erste oder dritte Koordinate), damit ist B_1 eine mögliche Basis von V.

(ii) Entfernt man den Vektor $\vec{v}_3$, so erhält man:

$$B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ \ 1 \\ \ \ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ \ 1 \\ 2 \\ \ \ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \ \ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_4$ sind linear unabhängig, da nicht kollinear (siehe erste Koordinate), damit ist B_2 eine mögliche Basis von V.

(iii) Entfernt man den Vektor $\vec{v}_4$, so erhält man:

$$B_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ sind linear unabhängig, da nicht kollinear (siehe dritte Koordinate), damit ist B_3 eine mögliche Basis von V.

Satz 3.32 Sei $A \in M(m \times n)$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

1. Die Lösungsmenge des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ ist ein $\mathbb{R}$-VR ($\subseteq \mathbb{R}^n$) der Dimension $n - \mathrm{Rg}(A)$.
2. Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|\vec{b}) = n$.
3. Falls $m = n$, dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Satz 3.33

1. Für $A \in M(n \times n)$ gilt: A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rg}(A) = n$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$
2. Für invertierbare Matrizen $A, B \in M(n \times n)$ gilt:

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \end{aligned}$$

3. Falls $A \in M(n \times n)$ orthogonal ist, dann ist $A^{-1} = A^{\top}$.

<u>Bemerkung</u>: Besteht die Matrix A aus den Koeffizienten einer Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, so ist sie orthogonal und ihre Inverse kann durch einfache Transposition bestimmt werden.

Satz 3.34 Für eine Matrix $A \in M(n \times n)$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. A ist invertierbar.
2. Für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar mit Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
3. Die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

ist umkehrbar mit Umkehrabbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \mapsto A^{-1}\vec{x}\,.$$

Die im Beispiel bisher betrachtete Koeffizientenmatrix A der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar, denn (jeder einzelne der nachstehenden Gründe ist dafür bereits hinreichend):

A besitzt nur drei Pivot-Elemente, d.h. A hat nicht den vollen Rang: $\text{Rg}(A) = 3 < 4$

Es gibt einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ mit $\vec{x} \notin V = \text{im}(A) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_3)$

Der Kern der durch A beschriebenen linearen Abbildung ist nicht trivial: $\ker(A) \neq \{\vec{0}\}$

Die Determinante von A verschwindet: $\det(A) = 0$

Für nachstehende 3×3-Matrix B hingegen existiert wegen $\det(B) = -1 \neq 0$ eine Inverse:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Mithilfe des Gauß-Algorithmus lässt sich für invertierbare Matrizen die Inverse in analoger Art und Weise wie die Lösung für homogene und inhomogene Gleichungssysteme finden. Ausgehend von der Identität $B \cdot B^{-1} = E_3$ ergibt sich für die erweiterte Koeffizientenmatrix mit E_3 auf der rechten Seite zunächst das Ergebnis der Vorwärtsphase in einem ersten Schritt. Das Zwischenergebnis zeigt drei Pivot-Elemente (alle 1), keine Nullzeile sowie die Tatsache, dass B vollen Rang hat: $\text{Rg}(B) = 3$. Führt man zusätzlich die Rückwärtsphase des Gauß-Algorithmus durch, so erreicht man die normierte Zeilenstufenform in einem zweiten Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Hiervon ist die gesuchte Inverse B^{-1} direkt abzulesen:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Zur Einführung von Eigenwerte und Eigenvektoren betrachte man zunächst folgende drei Beispiele:

Beispiel 3.18

(i) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \text{ Ergebnis ist Vielfaches von } \vec{v}$$

(ii) Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$B\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \text{ Ergebnis ist wieder Vektor } \vec{v}$$

$$B\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \vec{w} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \text{ Ergebnis ist kein Vielfaches von } \vec{w}$$

(iii) Für jede beliebige quadratische Matrix $A \in M(n,n)$ gilt für den Nullvektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$:

$$A\vec{v} = A \cdot \vec{0} = \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \text{ uninteressant; } \vec{0} \text{ wird daher nicht betrachtet}$$

Definition 3.35 Sei $A \in M(n \times n)$ eine quadratische Matrix. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ **Eigenwert** (EW) von A, wenn es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gibt mit

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ wird **Eigenvektor** (EV) von A zum Eigenwert λ genannt.

Wie findet man Eigenwerte?

Zu einer Matrix $A \in M(n, n,)$ sind Skalare $\lambda \in \mathbb{C}$ gesucht, die $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ für $\vec{v} \neq \vec{0}$ erfüllen, d.h.

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad &\Leftrightarrow \quad A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\vec{0} \neq \vec{v} \in \ker(A - \lambda E_n)$ liegt. Damit besitzt die Matrix $A - \lambda E_n$ nicht den vollen Rang, ist also nicht invertierbar, d.h. $\det(A - \lambda E_n) = 0$.

Satz 3.36 Sei $A \in M(n \times n)$. Dann ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ_0 eine Nullstelle des sogenannten **charakteristischen Polynoms** der Matrix A

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$$

ist, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Bemerkung: Eigenvektoren $\vec{v}$ zum Eigenwert λ von A sind genau die nicht-trivialen Lösungen des homogenen LGS $(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$.

Beispiel 3.19 Kommen wir zurück auf die einführenden Beispiele dieses Kapitels:

(i) Wir wissen bereits, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ einen Eigenwert $\lambda = 4$ besitzt. Ihr charakteristisches Polynom lautet:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & 6 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(6 - \lambda) - (-1) \cdot 2 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 20 \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms zweiten Grades (denn $A \in M(2,2)$), ergeben sich zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

Also $\lambda_1 = 5$ (uns bisher noch unbekannter EW von A) und $\lambda_2 = 4$ (uns bereits bekannter EW von A).

(ii) Wir wissen bereits, dass die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ einen Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt. Ihr charakteristisches Polynom lautet:

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

Die Nullstellen dieses Polynoms dritten Grades (denn $B \in M(3,3)$) können direkt abgelesen werden: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ (uns bisher noch unbekannte EW von B) und $\lambda_3 = 1$ (uns bereits bekannter EW von B).

Wie berechnet man die Eigenvektoren zu einem Eigenwert?

Hat man einen EW $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ einer Matrix $A \in M(n,n)$ gefunden, d.h. $\chi_A(\lambda_0) = 0$, dann weiß man, dass es einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ geben muss, sodass $(A - \lambda_0 E_n)\vec{v} = \vec{0}$ erfüllt ist. Dieses homogene LGS löst man mithilfe des **Gauß-Algorithmus**.

Beispiel 3.20 Kommen wir nochmals zurück auf die einführenden Beispiele dieses Kapitels:

(i) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ kennen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 4$.

EV zum EW $\lambda_1 = 5$:

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Nullzeile kann $v_2 = c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden. Aus der ersten Zeile ergibt sich $v_1 - v_2 = 0$, also folgt $v_1 = c$. Damit ist jeder Vektor $\vec{0} \neq \vec{v} \in \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$.

EV zum EW $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Nullzeile kann $v_2 = c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden. Aus der ersten Zeile ergibt sich $v_1 - 2v_2 = 0$, also folgt $v_1 = 2c$. Damit ist jeder Vektor $\vec{0} \neq \vec{v} \in \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

(ii) Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ kennen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$.

EV zum EW $\lambda_1 = 3$:

$$B - 3E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Nullzeile kann $v_3 = c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden. Aus der zweiten Zeile ergibt sich $v_2 + v_3 = 0$, also folgt $v_2 = -c$. Aus der ersten Zeile ergibt sich $v_1 + 2v_3 = 0$, also folgt $v_1 = -2c$. Damit ist jeder Vektor $\vec{0} \neq \vec{v} \in \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ Eigenvektor von B zum EW $\lambda_1 = 3$.

EV zum EW $\lambda_2 = 2$:

$$B - 2E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Nullzeile kann $v_3 = c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden. Ferner folgt $v_2 = v_1 = 0$. Damit ist jeder Vektor $\vec{0} \neq \vec{v} \in \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ Eigenvektor von B zum EW $\lambda_2 = 2$.

EV zum EW $\lambda_3 = 1$:

$$B \quad E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ 1 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Nullzeile kann $v_3 = c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden. Aus der zweiten Zeile ergibt sich $v_2 \quad v_3 = 0$, also folgt $v_2 = c$. Aus der ersten Zeile folgt $v_1 = 0$. Damit ist jeder Vektor $\vec{0} \neq \vec{v} \in \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ Eigenvektor von B zum EW $\lambda_3 = 1$.

Bemerkungen zu Eigenwerten und Eigenvektoren

Sei $A \in M(n \quad n)$. Dann ist das charakteristische Polynome $\chi_A(\lambda)$ ein Polynom vom Grad n. Deshalb hat A höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann sind die Diagonalelemente $a_{11}, \dots, a_{nn}$ genau die Eigenwerte von A. Diese Aussage gilt analog für eine untere Dreiecksmatrix.

Sei $A \in M(n \quad n)$ eine reelle symmetrische Matrix, d.h. $A^\top = A$. Dann gilt:

1. alle Eigenwerte von A sind reell,
2. es gibt genau n linear unabhängige Eigenvektoren von A
3. Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten von A gehören, stehen aufeinander senkrecht

$\boxed{\text{Erweiterung des mathematischen Werkzeugkastens}}$

Die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt in der Praxis des Ingenieurwesens, der Physik und der Naturwissenschaften im Allgemeinen vielfältige Anwendung. Das Verfahren zur Diagonalisierung von Matrizen ist in der folgenden Darstellung von $1 + 5$ praktischen Methoden nur eine von mehreren wesentlichen Anwendungen.

0. Was sind die Spalten einer Matrix?

Betrachtet man eine allgemeine Matrix $M \in M(2,2)$, so lautet diese $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wendet man A auf den ersten Basisvektor sowie den zweiten Basisvektor an, so findet man:

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{1. Spalte von } A$$

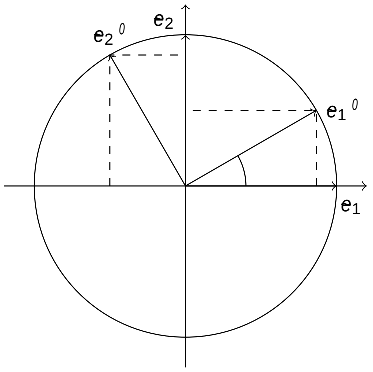
$$A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{2. Spalte von } A$$

Diese Beobachtung gilt allgemein:

$\Rightarrow$ *Die Spalten einer Matrix sind die Bilder (Ergebnisse) der Einheitsvektoren.*

Beispiel 3.21 Gesucht ist eine Matrix $A \in M(2,2)$, die den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ abbildet. Es ergibt sich: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. In der ersten Spalte kann direkt das gewünschte Ergebnis eingetragen werden. Für die zweite Spalte ist $\vec{w} = 2\vec{e}_2$ zu beachten, d.h. dort muss die Hälfte des gewünschten Ergebnisses stehen.

1. Drehmatrix in 2D
   Ziel ist es, das zweidimensionale Koordinatensystem um einen Winkel α in mathematisch positive Richtung (d.h. nach links) zu drehen:



$$\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Damit sind die Bilder der alten Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ im neuen Koordinatensystem bekannt, also auch die transformierende Matrix:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.22 Möchte man das gesamte Koordinatensystem um den Winkel $\alpha = 45$ drehen, so wird der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^\top$ mittels folgender Matrix transformiert:

$$D_{45} = D_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

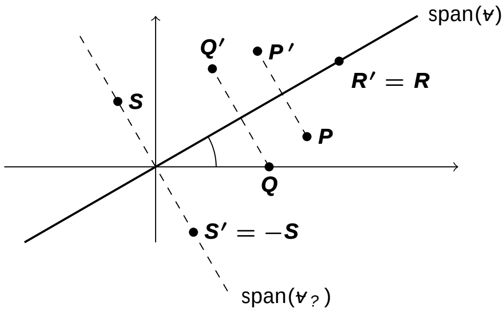
Dies ergibt sich aus $\cos(45) = \sin(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit folgt:

$$\vec{v}' = D_{45} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Drehmatrix in 3D
   Nachstehende Matrizen beschreiben Drehungen des dreidimensionalen Koordinatensystems um die x-, y- bzw. z-Achse (jeweils mathematisch positive Richtung):

$$D_{x;} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad D_{y;} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad D_{z;} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 2D Spiegelungen an einer Geraden



Gegeben ist die Gerade, an der gespiegelt werden soll: $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Daraus lässt sich der Winkel α berechnen.

Die gestrichenen Punkte (P' oder Q') bezeichnen die gespiegelten Punkte: $P' = S_{\vec{v};} P$ oder $Q' = S_{\vec{v};} Q$ mit

$$S_{\vec{v};} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Spezielle Punkte bei der Spiegelung an einer Geraden:

> Punkte, die direkt auf der Geraden span($\vec{v}$) liegen, werden beim Spiegeln auf sich selbst abgebildet: $R' = S_{\vec{v}} \cdot R = R$. Diese Punkte sind also Eigenvektoren von $S_{\vec{v}}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.
>
> Punkte, die auf der senkrechten Geraden span($\vec{v}_\perp$) liegen, werden beim Spiegeln auf ihr Negatives abgebildet: $S' = S_{\vec{v}} \cdot S = -S$. Diese Punkte sind also Eigenvektoren von $S_{\vec{v}}$ zum Eigenwert $\lambda = -1$.

4. Koordinatentransformation für Vektoren
   Betrachtet man neben der kanonischen Standardbasis $B_{\mathsf{std}} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ eine alternative Basis $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, so transformiert die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

   zwischen der alternativen Basis der Standardbasis. Ist der Koordinatenvektor bezüglich der alternativen Basis B gegeben durch $\vec{v}_B$, so lauten die Koordinaten in der kanonischen Basis

$$\vec{v} = T \cdot \vec{v}_B$$

   Beispiel 3.23 Neben der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ betrachte man die alternative Basis

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   In der Basis B betrachte man den Vektor $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^\top$, was bedeutet, dass

$$\vec{v} = 3 \cdot \vec{b}_1 - 1 \cdot \vec{b}_2 + 2 \cdot \vec{b}_3$$

   gilt. In der kanonischen Basis lauten die Koordinaten also

$$\vec{v} = T \cdot \vec{v}_B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5. Koordinatentransformation für Matrizen
   Gegeben sei eine lineare Beziehung $\vec{w} = A \cdot \vec{v}$ mit $A \in M(n,n)$ und $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren in der Standardbasis.

   Möchte man nun diese Beziehung in einer alternativen Basis $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ darstellen, so ergibt sich zunächst für die Vektoren (mit T aus den Spalten $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$):

$$\vec{v} = T \cdot \vec{v}_B, \quad \vec{w} = T \cdot \vec{w}_B$$

   Damit erhält man aus der gegebenen linearen Beziehung:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= A\vec{v} \\ \Rightarrow \quad T\vec{w}_B &= AT\vec{v}_B \\ \Rightarrow \quad \vec{w}_B &= \underbrace{T^{-1}AT}_{A_B} \cdot \vec{v}_B \end{aligned}$$

   Also gilt für die transformierte Matrix (bezüglich der Basis B):

$$A_B = T^{-1}AT$$

   Bemerkung: Ist T eine orthogonale Matrix, so ist $T^{-1} = T^\top$ einfach zu erhalten.

Beispiel 3.24 Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und die alternative ONB:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es ergibt sich als (orthogonale) Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } T^{-1} = T^\top$$

Damit ergibt sich für die transformierte Matrix A_B bezüglich der alternativen ONB:

$$\begin{aligned} A_B &= T^\top A T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass sich die Beziehung

$$\vec{w} = A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}$$

in der alternativen ONB darstellen lässt als

$$\vec{w}_B = T^\top A T \cdot \vec{v}_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{v}_B$$

Diese Darstellung in Form einer Diagonalmatrix ist deutlich einfacher, da die Basisvektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ durch die zugrundeliegende Beziehung nur noch gestreckt, aber nicht (mehr) miteinander vermischt werden wie es bei der Matrix A und den Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ der Fall war.

Bemerkungen: Die Frage lautet natürlich, wie man die Transformationsmatrix T bzw. die „richtige" alternative Basis B ableiten kann? Dies wird durch ein standardisiertes Verfahren, der so genannten **Diagonalisierung**, erreicht. Im Anhang widmet sich eine separate Aufgabe im Projekt A.3 dieser Problemstellung. An dieser Stelle sei kurz erwähnt:

- Die Diagonalelemente $\{-2, 6, 3\}$ von A_B sind die **Eigenwerte** der Matrix A.
- Die Basis B besteht aus (normierten) **Eigenvektoren** der Matrix A.

4 Grenzwerte

4.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Definition 4.1 Eine Funktion a mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ heißt **Folge**. Die Funktionswerte $a(n)$ werden üblicherweise als a_n geschrieben und heißen **Folgenglieder**. Die Definitionsmenge einer Folge wird auch als **Indexmenge** der Folge bezeichnet. Die Funktionsvorschrift, die jedem n aus der Indexmenge das Element a_n zuordnet, nennt man das **Bildungsgesetz** der Folge. Eine Folge heißt **alternierend**, wenn $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ für alle n aus der Indexmenge.

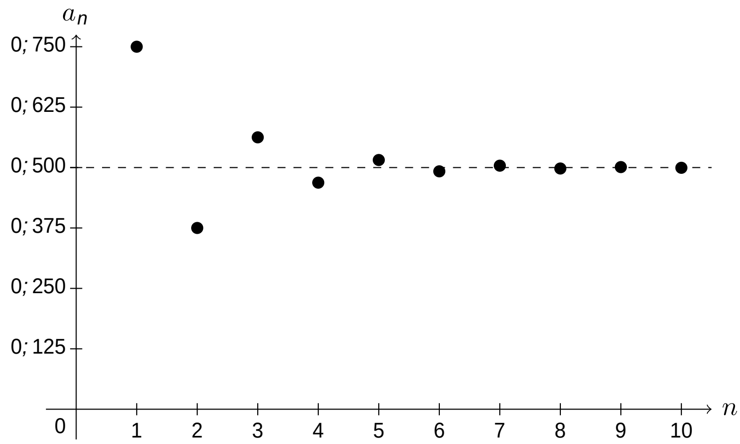
Schreibweisen: $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ bzw. $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$

Beispiel 4.1 Untersuchung der Folge $a_n = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ mit Indexmenge $n \in \mathbb{N}$ für „große“ n:

Wertetabelle

n	1	2	3	4	5		10
a_n	0,7500	0,3750	0,5625	0,4688	0,5156		0,4995

Graphische Darstellung



Frage
Was passiert für „große“ n?

Vermutung
Die graphische Darstellung lässt vermuten, dass die Folgenglieder a_n mit steigenden n immer näher am Wert $\frac{1}{2}$ liegen. ABER: Der Wert $\frac{1}{2}$ wird niemals erreicht: $a_n \neq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wie lässt sich diese Vermutung mathematisch fassen?

Idee: Wenn man eine *Ungenauigkeit* von $0{,}02 = \frac{1}{50}$ zulässt, dann weichen die Folgenglieder a_n irgendwann nur noch maximal um $0{,}02$ von dem Wert $\frac{1}{2}$ ab, also:

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 0{,}02 \quad \text{für alle } n \geq N$$

Für welchen Index $N \in \mathbb{N}$ gilt diese Aussage? Es ergibt sich

$$\left|a_5 - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{33}{64} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{64} < 0{,}02$$

Damit folgt $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 0{,}02$ für alle $n \geq 5$.

Wenn nun für *jede beliebige* Ungenauigkeit $\epsilon > 0$ ein solcher Index N (hängt von ϵ ab) gefunden werden kann, so ergibt sich, dass sich die Folge (a_n) einem Grenzwert a (hier $a = \frac{1}{2}$) beliebig nah annähert.

Definition 4.2 Die Folge (a_n) heißt **konvergent** mit dem **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Die Schreibweise für einen Grenzwert ist:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Bemerkungen zur Folgenkonvergenz:

Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt **Nullfolge**.

Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben.

Eine Folge, die nicht konvergiert, wird **divergent** genannt.

Wenn eine Folge konvergiert, dann ist sie beschränkt (d.h. es gibt ein $M > 0$, sodass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_0$).

Definition 4.3 Eine Folge (a_n) heißt **bestimmt divergent** mit dem **uneigentlichen Grenzwert** ∞ (bzw. $-\infty$), falls es für jedes $M > 0$ (bzw. $M < 0$) ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt:

$$a_n > M \quad (\text{bzw. } a_n < M)$$

Die Schreibweise für diesen uneigentlichen Grenzwert ist:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty)$$

Beispiel 4.2

(i) Die nachstehenden Folgen (a_n) und (b_n) sind Nullfolgen, d.h. $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ und $b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit } a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{und} \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ mit } b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii) Die Tatsache, dass eine Folge (a_n) maximal einen Grenzwert haben kann, überlegt man sich wie folgt: Angenommen, es gilt $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ und $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N_a$ und ebenso gibt es ein $N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq N_b$. Wählt man den größeren der beiden Indizes aus, also $N = \max\{N_a, N_b\}$, so gilt für alle $n \geq N$:

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, liegen die beiden Grenzwerte a und b beliebig nah beisammen, d.h. $a = b$. Daraus folgt, dass die konvergente Folge genau einen Grenzwert hat.

(iii) Es gibt zwei Typen von nicht-konvergenten (d.h. divergenten) Folgen:

(a) Es gibt Folgen, die über alle Grenzen wachsen (oder fallen), z.B. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = n^2$: $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Dies ist ein Beispiel für *bestimmte Divergenz*.

(b) Es gibt auch Folgen mit *unbestimmter Divergenz*, z.B. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$.

Satz 4.4 (Monotonieprinzip)

1. Sei (a_n) eine Folge, die für alle n ab einem gewissen Index N_0 (d.h. für alle $n \geq N_0$) folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} &a_n \leq a_{n+1} \quad &&(\text{monoton steigend}) \\ &a_n \leq M \text{ für ein } M \in \mathbb{R} \quad &&(\text{nach oben beschränkt}) \end{aligned}$$

Dann konvergiert (a_n) gegen einen Grenzwert $a \leq M$.

2. Sei (a_n) eine Folge, die für alle n ab einem gewissen Index N_0 (d.h. für alle $n \geq N_0$) folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} &a_n \geq a_{n+1} \quad &&(\text{monoton fallend}) \\ &a_n \geq M \text{ für ein } M \in \mathbb{R} \quad &&(\text{nach unten beschränkt}) \end{aligned}$$

Dann konvergiert (a_n) gegen einen Grenzwert $a \geq M$.

Satz 4.5 (Grenzwertregeln)

1. Seien (a_n), (b_n) Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ und $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Dann gilt:

   $$a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \pm b$$

   $$a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot b$$

   $$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}, \text{ falls } b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0 \text{ gilt}$$

2. Seien (a_n), (b_n) Folgen mit gleichem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, d.h. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ und $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Gilt für eine weitere Folge (c_n), dass sie für alle n (ab einem gewissen Index N_0) durch die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt ist, d.h. $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle n (ab einem gewissen Index N_0), dann ist die Folge (c_n) konvergent mit dem gleichen Grenzwert:

   $$c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

   Bemerkung: Diese Aussage bezeichnet man manchmal als „Einschnürungssatz (Sandwich-Theorem)“ für Folgen.

3. Bei bestimmter Divergenz gilt Folgendes, wobei $\pm\infty$ für eine Folge mit uneigentlichem Grenzwert $\pm\infty$, a für eine Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und 0^+ für eine Folge positiver reeller Zahlen mit Grenzwert 0 steht:

   $$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad a \pm \infty = \pm\infty$$

   $$\infty \cdot \infty = \infty, \quad -\infty \cdot \infty = -\infty$$

   $$a \cdot \infty = \infty, \text{ falls } a > 0, \quad a \cdot \infty = -\infty, \text{ falls } a < 0$$

   $$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \text{ falls } a \neq 0$$

   $$\frac{\pm\infty}{0^+} = \pm\infty$$

   $$\frac{a}{0^+} = +\infty, \text{ falls } a > 0, \quad \frac{a}{0^+} = -\infty, \text{ falls } a < 0$$

   $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0 und 1^∞ sind unbestimmte Ausdrücke, wofür es keine allgemeinen Regeln gibt.

Nachstehende grundlegende Grenzwerte werden bei der Berechnung weiterer Grenzwerte benötigt:

Satz 4.6 (Wichtige Grenzwerte)

1. Seien $\alpha, c \in \mathbb{R}, c > 0$. Dann gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha < 0 \\ 1 & \text{falls } \alpha = 0 \\ \infty & \text{falls } \alpha > 0 \end{cases}$$

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$$

2. Seien $q, x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{divergent} & \text{falls } q \leq -1 \\ 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Beispiel 4.3

(i) Gesucht ist der Grenzwert von $a_n = \dfrac{4(n+1)^4}{3n^4+3n+5}$. Der Zähler wird mit dem binomischen Lehrsatz ausgeschrieben, der Bruch mit der inversen größten Potenz (n^{-4}) erweitert, sodass:

$$a_n = \frac{4\left(n^4+4n^3+6n^2+4n+1\right)}{3n^4+3n+5} = \frac{4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}{3+\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{3}$$

Alle Brüche in Zähler und Nenner konvergieren für $n \to \infty$ gegen Null, daher konvergiert der Zähler insgesamt gegen 4 und der Nenner insgesamt gegen 3, woraus $a_n \to \frac{4}{3}$ folgt.

(ii) $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5^n} + \frac{n^2+1}{n^2}\right)$. Die Summe wird in der Grenzwertbetrachtung auseinandergezogen und der zweite Summand wieder mit der inversen größten Potent (n^{-2}) erweitert:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{5^n}}_{\to 0} + \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2 \cdot 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(iii) $a_n = \sqrt{n^2+3n+4} - n$.
Idee: Ausklammern von n^2 unter der Wurzel:

$$a_n = n \cdot \sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} - n = \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} - 1\right)}_{\to 0} \to \quad ?$$

Produkte, die im Grenzwert „$0 \cdot \infty$" ergeben, können nicht ausgewertet werden, da ihr Ergebnis unbestimmt ist. Die erste Idee ist nicht falsch, ist aber nicht zielführend.

Neue Idee: Erweitern des Bruchs und Verwendung der dritten binomischen Formel zur Beseitigung der Wurzel im Zähler:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+4} - n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+4} + n\right)}{\sqrt{n^2+3n+4}+n} = \frac{(n^2+3n+4) - n^2}{n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}+1\right)} \\ &= \frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}+1} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3+0}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Im Zähler tritt im zweiten Summanden eine Nullfolge auf, ebenso unter der Wurzel im Nenner. Insgesamt folgt $a_n \to \frac{3}{2}$.

4.2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Bisher: Grenzwerte von Folgen $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Jetzt: Grenzwerte von (reellen) Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

Definition 4.7 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. f hat in $a \in \overline{\mathbb{R}}$ den (uneigentlichen) **Grenzwert** $c \in \overline{\mathbb{R}}$, falls gilt:

Für jede Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Die Schreibweise für diesen (uneigentlichen) Grenzwert ist:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Bemerkung: Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ nennt man **affine Erweiterung**[2] von $\mathbb{R}$.

Definition 4.8 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
f hat in $a \in \overline{\mathbb{R}}$ den (uneigentlichen) **linksseitigen Grenzwert** $c \in \overline{\mathbb{R}}$, falls gilt:

Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n < a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Die Schreibweise ist:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to a; x<a} f(x) = c$$

f hat in $a \in \overline{\mathbb{R}}$ den (uneigentlichen) **rechtsseitigen Grenzwert** $c \in \overline{\mathbb{R}}$, falls gilt:

Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n > a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Die Schreibweise ist:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to a; x>a} f(x) = c$$

Satz 4.9 (Grenzwertregeln)

1. Seien f und g reelle Funktionen mit den Grenzwerten $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d \in \mathbb{R}$ für $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten folgende Verträglichkeiten:

   $$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = c \pm d$$

   $$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d$$

   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}, \text{ falls } g(x) \neq 0 \text{ und } d \neq 0$$

2. Seien f, g, h reelle Funktionen, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ und $c \in \mathbb{R}$.
   Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ und $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle x aus der Definitionsmenge von f, g und h, dann gilt auch $\lim\limits_{x\to a} h(x) = c$.

   Bemerkung: Diese Aussage bezeichnet man manchmal als „Einschnürungssatz (Sandwich-Theorem)“ für Funktionen.

[2] Neben der affinen Erweiterung gibt es die projektive Erweiterung (Einpunktkompaktifizierung) $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, bei der nur ein weiteres Element den reellen Zahlen hinzugefügt wird. Diese Erweiterung steht im Zusammenhang mit der stereographischen Projektion, wird aber in dieser Vorlesung nicht weiter ausgeführt.

Bemerkung zu divergenten Funktionsgrenzwerten: Die Regeln für bestimmte Divergenz und die unbestimmten Ausdrücke übertragen sich von Folgen in analoger Weise auf Funktionen.

Bemerkungen zu Grenzwerten von Funktionen

Sei $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom vom Grad n und $q(x) = b_0 + \ldots + b_k x^k$ ein Polynom vom Grad k.

- Für $n > k$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} \in \{-\infty, \infty\}$
- Für $n = k$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_n}{b_n}$
- Für $n < k$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

e^x wächst (auf lange Sicht) schneller als jede Potenz von x, d.h.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}$$

$\ln(x)$ wächst (auf lange Sicht) langsamer als jede Potenz von x, d.h.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}$$

Definition 4.10

Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig in $a \in D$**, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt.

f heißt **stetig in D**, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

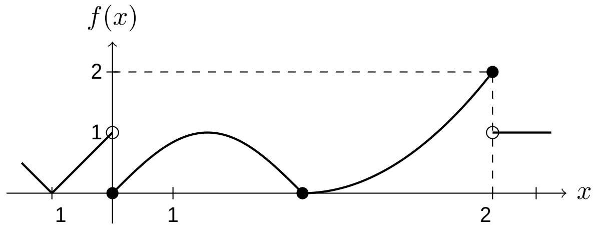
f heißt **rechtsseitig stetig in a**, falls $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

f heißt **linkssseitig stetig in a**, falls $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Bemerkung: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die stetig in $a \in D$ ist, ist immer rechtsseitig stetig in a sowie linksseitig stetig in a.

Beispiel 4.4 (i) Betrachte die abschnittsweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{für } x < 0 \\ \sin(x) & \text{für } 0 \le x < \pi \\ \frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^2 & \text{für } \pi \le x \le 2\pi \\ 1 & \text{für } x > 2\pi \end{cases}$$



Für die Funktion f gelten die folgenden Eigenschaften:

- Der linksseitige Grenzwert bei $x = 0$ lautet: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$
- Der rechtsseitige Grenzwert bei $x = 0$ lautet: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ Da sich links- und rechtsseitiger Grenzwert bei $x = 0$ unterscheiden, ist f in diesem Punkt nicht stetig.

Es gilt: $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = 0$. Dies ist ebenfalls der Funktionswert an der Stelle: $f(\pi) = 0$.

$\Rightarrow$ Damit ist f im Punkt $x = \pi$ stetig.

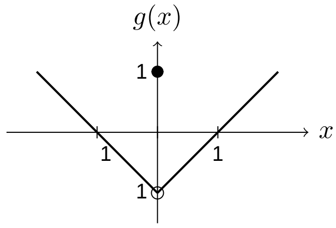
Ferner gilt: $\lim\limits_{x \to 2\pi^-} f(x) = 2 = f(2\pi)$ aber $\lim\limits_{x \to 2\pi^+} f(x) = 1$.

$\Rightarrow$ Damit ist f im Punkt $x = 2\pi$ ebenfalls nicht stetig

$\Rightarrow$ Da f an mindestens einer Stelle nicht stetig ist ($x \in \{0, 2\pi\}$), ist die gesamte Funktion nicht stetig.

(ii) Betrachte die abschnittsweise definierte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



Es ergibt sich:

Der linksseitige sowie rechtsseitige Grenzwert bei $x = 0$ lautet: $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$ und $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1$

Der Funktionswert von g bei $x = 0$ ist hingegen gemäß Definition: $g(0) = 1 \neq -1$

$\Rightarrow$ Die Funktion g ist in diesem Punkt nicht stetig und damit insgesamt nicht stetig.

(iii) Da der Polynomgrad im Nenner größer ist als der Polynomgrad im Zähler, ist nachstehende Folge eine Nullfolge (Erweiterung mit x^{-3}):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 5}{5x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{5 - \frac{1}{x^3}} = 0$$

(iv) Bei gleichem Polynomgrad in Zähler und Nenner ergibt sich ein endlicher Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8x^4 - 2x^2 - 7}{2x^4 + 17x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{8 - \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{17}{x} - \frac{1}{x^4}} = \frac{8}{2} = 4$$

(v) Ist der Polynomgrad im Zähler größer als im Nenner, so ist mittels Polynomdivision eine Asymptote $a(x) = x - 4$ und ein Restterm zu ermitteln:

$$\frac{x^2 - 3x + 42}{x + 1} = x - 4 + \frac{46}{x + 1}$$

Die Asymptote zeigt das Divergenzverhalten an. In diesem Fall ist sie linear:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 42}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \Big(\underbrace{x - 4}_{\to \infty} + \underbrace{\frac{46}{x + 1}}_{\to 0} \Big) = \infty$$

(vi) Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Definitionslücken $x_0 \notin D$ aufweisen, können daraufhin überprüft werden, ob es eine **stetige Fortsetzung** gibt. Betrachte $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)$.

Es gilt nach der Erweiterung des Ausdrucks mit $\sqrt{\cdot} + 1$ und dem Kürzen des Faktors x^2:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + x^2}{x\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{|x|}{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{|x|}\right)} \xrightarrow{x \to \pm\infty} \begin{cases} 1 & \text{für } x \to +\infty \\ -1 & \text{für } x \to -\infty \end{cases}$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen resultieren von $\frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x)$, wobei sgn die Signumfunktion, d.h. die Vorzeichenfunktion, für $x \neq 0$ bezeichnet.

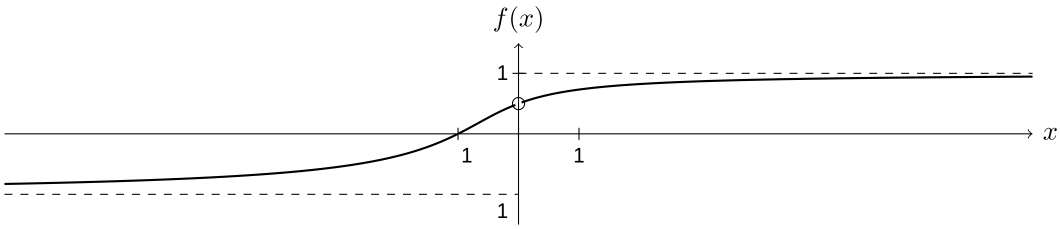
Die Nullstellen von f berechnen sich zu $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x+x^2} - 1 = 0$, d.h. für $x = -1 \in D$ oder $x = 0 \notin D$. Damit ist $x = -1$ die einzige Nullstelle von f.

In der Umgebung der Definitionslücke $x_0 = 0$ gilt:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2}{x\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \frac{1}{2}$$

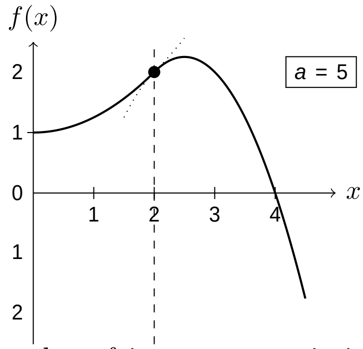


Damit ist f stetig fortsetzbar zu einer Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

Man sagt, dass die Definitionslücke $x_0 = 0$ von f **stetig hebbar** ist.

(vii) Betrachtet man die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit Parameter $a \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + ax - 4 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ kann so gewählt werden, dass f insgesamt stetig ist. Der linksseitige

Grenzwert stimmt mit dem Funktionswert überein: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2 = f(2)$. Für den rechtsseitigen Grenzwert muss im stetigen Falle daher gelten:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -8 + 2a \stackrel{!}{=} f(2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 10$$

Daraus folgt $a = 5$, wofür der darüberstehende (stetige) Funktionsgraph gezeichnet ist.

Satz 4.11

1. Seien f und g stetig in a. Dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in a. Falls $g(a) \neq 0$, ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.
2. Ist f stetig in a und g stetig in $f(a)$, dann ist $g \circ f$ stetig in a.

Satz 4.12 (Zwischenwertsatz) Sei f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.

Beispiel 4.5 Der Zwischenwertsatz kann im so genannten **Bisektionsverfahren** genutzt werden, um approximative Nullstellen zu berechnen. Dieser kommt bei Funktionen zum Einsatz, deren Nullstellen nicht analytisch gefunden werden können.

Betrachte etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x) - x$. Gesucht ist die erste positive Nullstelle von f, d.h. die kleinste Lösung $x > 0$ der Gleichung $\cos(x) = x$. Es kommt folgendes Verfahren zum Einsatz:

Betrachte die Funktionswerte von f bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$: $f(0) = 1$ und $f(\pi) = -1 - \pi < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es eine Nullstelle $x_0 \in I_1 = [0; \pi]$ von f geben.

Halbierung des Intervalls $[0; \pi]$ mit $x_3 = \frac{\pi}{2}$ und $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es eine Nullstelle $x_0 \in I_2 = [0; \frac{\pi}{2}]$ von f geben.

Halbierung des Intervalls $[0; \frac{\pi}{2}]$ mit $x_4 = \frac{\pi}{4}$ und $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \approx -0,08 < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es eine Nullstelle $x_0 \in I_3 = [0; \frac{\pi}{4}]$ von f geben.

Halbierung des Intervalls $[0; \frac{\pi}{4}]$ mit $x_5 = \frac{\pi}{8}$ und $f(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - \frac{\pi}{8} \approx 0,53 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es eine Nullstelle $x_0 \in I_4 = [\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}] \approx [0,39; 0,79]$ von f geben.

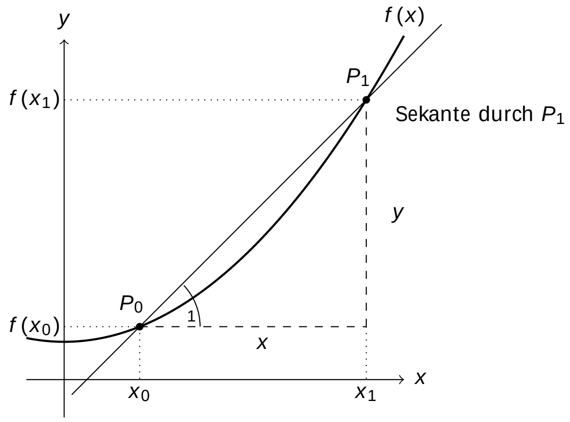
Halbierung des Intervalls $[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}]$ mit $x_6 = \ldots$

Die tatsächliche Nullstelle lautet $x_0 = 0,74\ldots$, was bereits relativ nah an der Intervallgrenze $x_4 = \frac{\pi}{4} \approx 0,79$ liegt. Das Verfahren kann dann abgebrochen werden, wenn die erreichte Intervalllänge unter eine im Vorfeld definierte Genauigkeit sinkt.

In diesem Beispiel erreicht man nach vier Iterationen das Intervall I_4 und kann die Nullstelle mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2}|I_4| = \frac{\pi}{16} \approx 0,20$ angegeben. Diese maximal mögliche Abweichung ist von der Mitte des erreichten Intervalls I_4 zu messen: $\frac{3\pi}{16} \pm 0,20 \approx 0,59 \pm 0,20$. In der Tat weicht die tatsächliche Nullstelle x_0 von der Mitte des Intervalls nur um $|x_0 - \frac{3\pi}{16}| \approx 0,15 < 0,20$ ab.

5 Differentialrechnung

5.1 Der Ableitungsbegriff



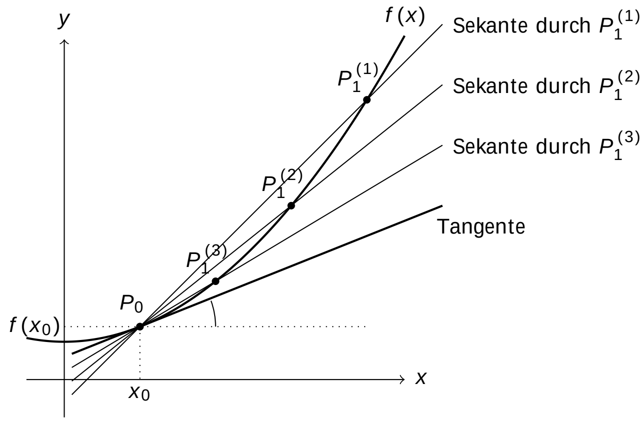
Ziel der Ableitung ist es, für eine Funktion f die Steigung des Funktionsgraphen am Punkt P_0 zu bestimmen.

Da die Punkte P_1 und P_0 nicht identisch sind ($x_1 > x_0$), ist die Steigung der Sekante durch P_1 nur eine Approximation der Steigung des Graphen von f am Punkt P_0.

Dadurch, dass der Punkt P_1 näher an P_0 heranrückt, kann die Approximation verbessert werden.

$\Rightarrow$ Steigung der ***Sekante*** durch P_0 und P_1: (**Differenzenquotient**)

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha_1)$$



Für eine Folge von Sekantensteigungen ergibt sich im Grenzwert die Tangentensteigung am Punkt P_0.

Falls dieser Grenzwert für alle Folgen $x_1 \to x_0$ existiert, ist er die Ableitung von f an dieser Stelle.

$\Rightarrow$ Für $\Delta x \to 0$: Steigung der ***Tangente*** an den Graphen von f in P_0: (**Differentialquotient**)

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$$

Definition 5.1 Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in (a, b)$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.
Falls der Grenzwert existiert, wird er mit $f'(x_0)$ bzw. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ bezeichnet und (erste) Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt. Ist f in jedem Punkt von (a, b) differenzierbar, so nennt man die Funktion

$$f' : \begin{array}{ccc} (a, b) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

die (erste) **Ableitung** von f.

Satz 5.2 Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar $\Leftrightarrow$
Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Restfunktion $r : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + r(x),$$

wobei gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann ist $c = f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
Damit lautet die ***Gleichung der Tangente*** an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Beispiel 5.1 Direkt aus der Definition der Ableitung ergeben sich elementare Ableitungen:

(i) Für die quadratische Funktion $f(x) = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt laut Definition:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax \end{aligned}$$

(ii) Für die kubische Funktion $f(x) = ax^3$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt laut Definition:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)^3 - ax^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^3 + 3ax^2\Delta x + 3ax(\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3 - ax^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (3ax^2 + 3ax\Delta x + a(\Delta x)^2) = 3ax^2 \end{aligned}$$

(iii) Für die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{ax}$ mit $a > 0$ und $x > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{a(x + \Delta x)} - \sqrt{ax}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x \left(\sqrt{a(x + \Delta x)} + \sqrt{ax} \right)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a}{\sqrt{a(x + \Delta x)} + \sqrt{ax}} = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \end{aligned}$$

5.2 Ableitungstechniken

Satz 5.3 Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$ und $c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. **Linearität**: $c \cdot f + d \cdot g$ ist differenzierbar in x_0:

$$(c \cdot f + d \cdot g)'(x_0) = c \cdot f'(x_0) + d \cdot g'(x_0)$$

2. **Produktregel**: $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

3. **Quotientenregel**: Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Satz 5.4 Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$ und $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$.
Kettenregel: Dann ist $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Beispiel 5.2 Möchte man für $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitung ihrer Umkehrfunktion f^{-1} berechnen, so ergibt sich aus der definierenden Eigenschaft der Umkehrfunktion wie folgt:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \quad \text{(Ableiten der beiden Seiten, Kettenregel)} \\ f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) &= 1 \\ \Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{(„Masterformel“)} \end{aligned}$$

Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

Bemerkung:
Bei der Ableitung von trigonometrischen Umkehrfunktionen finden neben der zuvor dargestellten „Masterformel“ zusätzlich pythagoreische Identitäten wie etwa $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ oder $\cos(\arctan(x)) = \sqrt{1+x^2}$ Verwendung.

Beispiel 5.3

(i) $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} \cdot (-1)\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x)$$

Dabei wurden die Linearität, $(e^x)' = e^x$ sowie die Kettenregel verwendet.

(ii) $f(x) = 4(x^2 + x \cdot e^x)$

$$\Rightarrow \; f'(x) = 4(2x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x) = 8x + 4e^x(1 + x)$$

Dabei wurden die Linearität, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $(e^x)' = e^x$ sowie die Produktregel verwendet.

(iii) $f(x) = 3\sqrt{1 + 2x}$ für $x \in [-\frac{1}{2}, \infty)$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1 + 2x}} \cdot 2 = \frac{3}{\sqrt{1 + 2x}}$$

Dabei wurden die Linearität, $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ sowie die Kettenregel verwendet.
Bei der Wurzelfunktion ergibt sich, dass f am Rande des Definitionsbereichs ($x = -\frac{1}{2}$) zwar definiert, aber nicht differenzierbar ist: $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f'(x) = \infty$. Für die Tangentensteigung ergibt sich für $x, x_0 > -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} T(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 3\sqrt{1 + 2x_0} + \frac{3}{\sqrt{1 + 2x_0}}(x - x_0) \\ &= 3\sqrt{1 + 2x_0}\left(1 + \frac{x - x_0}{1 + 2x_0}\right) \end{aligned}$$

Für $x_0 = 1$ etwa ergibt sich die Gerade: $T(x) = \sqrt{3}(x + 2)$

(iv) $f(x) = \cos\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \; f'(x) = -\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$$

Dabei wurden die Linearität, Kettenregel sowie $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ verwendet.

(v) $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$ (Umschreiben von x^x als Exponentialfunktion)

$$\Rightarrow \; f'(x) = e^{x \ln(x)} \cdot (1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln(x) + 1)$$

Dabei wurden die Kettenregel, Produktregel sowie elementare Ableitungen verwendet.

(vi) $f(x) = \arctan(1 + \sqrt{x})$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2 + 2\sqrt{x} + x}$$

Dabei wurden die Kettenregel und elementare Ableitungen ($(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$) verwendet.

(vii) Für $f(x) = \ln\left(1 - e^{-x}\right)$ sollen die erste und zweite Ableitung bestimmt werden:

$$\Rightarrow \; f'(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Dabei wurden mehrfach die Kettenregel sowie elementare Ableitungen verwendet.

$$\Rightarrow \; f''(x) = -\frac{1}{(e^x - 1)^2} \cdot e^x = \frac{1}{2 + e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cosh(x)}$$

Dabei wurden elementare Ableitungen sowie die Kettenregel verwendet.

Bemerkung zu höheren Ableitungen

$$
\begin{aligned}
f^{(0)} &:= f \\
f^{(1)} &:= f' \quad \text{(falls } f \text{ differenzierbar)} \\
f^{(2)} &:= f'' := (f')' \quad \text{(falls } f' \text{ differenzierbar)}
\end{aligned}
$$

Allgemein ist für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f definiert als

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' \quad \text{(falls } f^{(n-1)} \text{ differenzierbar)}$$

Satz 5.5 (Regeln von L'Hospital)
Es seien f und g differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ die Form „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" hat, aber der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R}$ existiert oder $\pm\infty$ ist, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel 5.4 Die Anwendung der Regeln von L'Hospital wird durch das Symbol L'H angezeigt:

(i) Für den nachstehenden Fall „$\frac{0}{0}$" ergibt sich:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

(ii) Für den nachstehenden Fall „$\frac{0}{0}$" ergibt sich:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + x^2 - 1}{\ln(1 + 2x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 2x}{\frac{2}{1+2x}} = \frac{1}{2}$$

(iii) Für den nachstehenden Fall von wiederholten „$\frac{\infty}{\infty}$" ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 e^x}{1 + e^{2x}} &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2xe^x + x^2 e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + x^2}{2e^x} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2 + 2x}{2e^x} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0
\end{aligned}
$$

5.3 Kurvendiskussion und Extrema

Satz 5.6 Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

1. $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Leftrightarrow$ f monoton steigend auf (a, b)
2. $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ f streng monoton steigend auf (a, b)
3. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Leftrightarrow$ f monoton fallend auf (a, b)
4. $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ f streng monoton fallend auf (a, b)

Satz 5.7 (Lokale Extrema)

1. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit einem lokalen Extremum (Maximum oder Minimum) an der Stelle $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

2. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Es gelte für $x_0 \in (a,b)$:
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
und
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
Dann hat f an der Stelle x_0

   ein lokales Maximum, falls n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) < 0$,
   ein lokales Minimum, falls n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) > 0$,
   kein lokales Extremum, falls n ungerade ist.

Satz 5.8 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ f linksgekrümmt (konvex) auf (a,b)

$f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ f rechtsgekrümmt (konkav) auf (a,b)

Definition 5.9 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist die **Krümmung** an der Stelle $x \in (a,b)$ definiert als
$$\kappa(x) := \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$
Ein Punkt x_0, an dem f sein Krümmungsverhalten, d.h. das Vorzeichen seiner Krümmung, ändert, heißt **Wendepunkt**.

Bemerkung:
Die Definition der Krümmung ist dergestalt, dass sie für einen Kreis konstant ist. Für die (Halbkreis)funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit Radius $r > 0$ und $|x| \leq r$ ergibt sich für $|x| < r$:
$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
Damit folgt eine konstante Krümmung:
$$\kappa(x) = \frac{-\frac{r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left(1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{r}$$

Satz 5.10 (Wendepunkte)

1. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit einem Wendepunkt an der Stelle $x_0 \in (a,b)$, dann gilt
$$f''(x_0) = 0$$

2. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Es gelte für $x_0 \in (a,b)$:
$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
und
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$
Dann hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, falls n ungerade ist.

Studie zu lokalen Extrema, Monotonie und Wendepunkten:

$f(x)$	x^2	x^3	x^4	x^5	$\ldots$	x^{41}	x^{42}
$f'(x)$	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$	$\ldots$	$41x^{40}$	$42x^{41}$
$f'(0)$	0	0	0	0	$\ldots$	0	0
$f''(0)$	2	0	0	0	$\ldots$	0	0
$f'''(0)$	0	6	0	0	$\ldots$	0	0
$f^{(4)}(0)$	0	0	24	0	$\ldots$	0	0
$f^{(5)}(0)$	0	0	0	120	$\ldots$	0	0
$f^{(41)}(0)$	0	0	0	0	$\ldots$	41!	0
$f^{(42)}(0)$	0	0	0	0	$\ldots$	0	42!
Extremum bei $x = 0$	Min		Min		$\ldots$		Min
Monotonie von f		X		X	$\ldots$	X	
strenge Monotonie von f		X		X	$\ldots$	X	
Wendepunkt bei $x = 0$		X		X	$\ldots$	X	

Beispiel 5.5 Nachfolgend werden exemplarisch zwei Kurvendiskussionen vorgestellt. Ziel ist es dabei stets, bei gegebener Funktion f ein möglichst genaues Verständnis ihrer Eigenschaften und ihres Graphen zu erhalten. Typische Elemente einer Kurvendiskussion sind (Liste nicht abschließend):

(maximaler) Definitionsbereich, Wertebereich

Monotonie und Symmetrie, Periodizität

Nullstellen

Grenzwerte am Rande des Definitionsbereichs oder bei Definitionslücken

Stetigkeit, stetige Fortsetzbarkeit

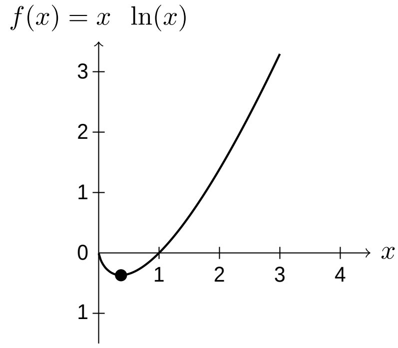
lokale sowie globale Extrema (Maxima und Minima)

Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Asymptoten

(...)

(i) Gegeben sei die Funktionsvorschrift $f(x) = x \cdot \ln(x)$. Es ergibt sich $D = D_{\max} = \mathbb{R}^+$, Wertebereich ist im Folgenden zu bestimmen.
<u>Nullstellen</u>: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \notin D$ oder $x = 1 \in D$
<u>Grenzwerte</u>: Mit L'Hospital ergibt sich:



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

Ferner gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
<u>Ableitungen</u>: Es ergibt sich $f'(x) = \ln(x)+1$ (Produktregel)
Damit ist $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$. Mit $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ (für alle $x \in D$) gibt es zwar keine Wendepunkte, aber bei $x = \frac{1}{e}$ ein Minimum mit Funktionswert $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} \approx -0,37$.
Damit ergibt sich für den Wertebereich $W = [-\frac{1}{e}, \infty)$.

(ii) Betrachte $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Es ist $D = D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
<u>Nullstellen</u>: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \notin D$ oder $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Die zweite Bedingung impliziert $\frac{1}{x} = \pi \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, also:

$$x_k = \frac{1}{\pi \cdot k} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Es gibt also unendlich viele Nullstellen, die alle im Intervall $I = [-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]$ liegen mit der größten sowie kleinsten Nullstelle als Intervallgrenzen.
<u>Grenzwerte</u>: Es gilt mit L'Hopital:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Ferner gilt $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, da Produkt aus Nullfolge und beschränkter Folge.
<u>Symmetrie</u>: Es gilt $f(-x) = f(x)$, d.h. f ist achsensymmetrisch (gerade Funktion)
<u>Ableitungen</u>: Es ergibt sich mit der Produkt- sowie Kettenregel für die erste Ableitung

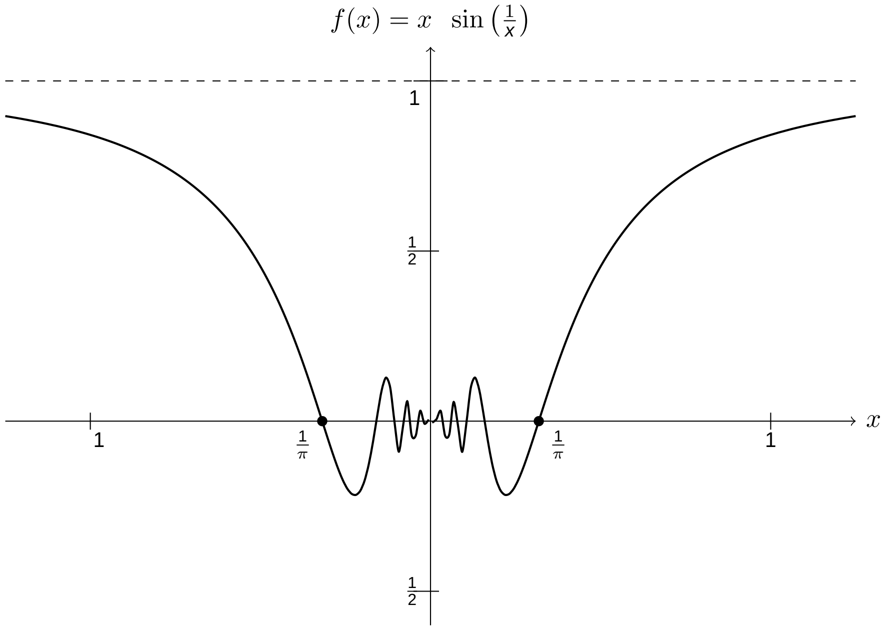
$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

sowie für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left[-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{f(x)}{x^4} \end{aligned}$$

Für die Nullstellen der ersten Ableitung, $f'(x) = 0$, ergeben sich unendlich viele Lösungen, die durch die Bedingung $x = \cot\left(\frac{1}{x}\right)$ beschrieben sind. Diese Bedingung lässt sich nicht weiter

analytisch vereinfachen, es sind nur numerische Näherungslösungen möglich.
Anders verhält es sich bei den Nullstellen der zweiten Ableitung, $f''(x) = 0$, da diese identisch zu den Nullstellen der Funktion f selbst sind.
Insgesamt lässt sich nachstehendes Bild aus der geführten Diskussion zeichnen:



5.4 Newton-Verfahren

Idee des Newton-Verfahrens
Für ein differenzierbares $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Nullstelle x^* gesucht.
Sei $x_0 \in [a, b]$ ein erster Schätzwert für x^* (Startwert). Die Tangente an f in $(x_0, f(x_0))$ wird durch nachstehende Gleichung beschrieben:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Falls $f'(x_0) \neq 0$ ist die Nullstelle der Tangentengleichung gegeben durch

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Die Nullstelle der Tangente dient als nächste Schätzung x_1 für x^*.
Indem man den obigen Schritt mit x_1 anstelle von x_0 wiederholt, erhält man ausgehend vom Startwert x_0 die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N}_0) .$$

In vielen Fällen gilt: $\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$.

Satz 5.11 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monotone stetige Funktion mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann hat f genau eine Nullstelle x^* in (a, b).
Wenn f zweimal stetig differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist, dann konvergiert die im Newton-Verfahren definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen die Nullstelle x^* von f:

$f''(x) \quad 0$ für alle $x \in (a,b)$ und $x_0 \in [a,b]$ so gewählt, dass $f(x_0) \quad 0$

$f''(x) \quad 0$ für alle $x \in (a,b)$ und $x_0 \in [a,b]$ so gewählt, dass $f(x_0) \quad 0$

Es gibt ein $C < 1$, sodass $\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| \quad C$ für alle $x \in [a,b]$.
Hinweis: Insbesondere muss der Startwert diese Bedingung erfüllen.

6 Integralrechnung

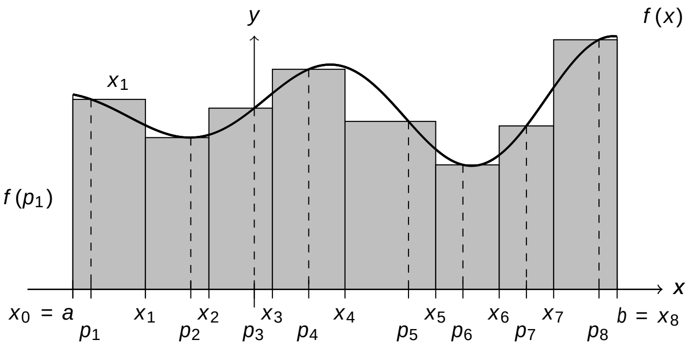
Während beim Ableiten Rechen*regeln* zum Einsatz kommen und jede Ableitung einer differenzierbaren Funktion stets bestimmbar ist, fußt das Integrieren von Funktionen auf Rechen*methoden*, deren effektiver Einsatz Erfahrung und manchmal auch mehrfache Versuche oder ein iteratives Vorgehen verlangt. Man sagt daher:

„*Ableiten ist Handwerk, Integrieren ist Kunst.*“

6.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Geometrische Anschauung des Integrals

Zu berechnen ist die Fläche A zwischen der x-Achse und dem Graphen einer beschränkten Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty)$:



Es ist ersichtlich, dass die graue Fläche aus elementargeometrischen Rechtecken die Fläche zwischen Graphen und x-Achse approximativ beschreibt. In manchen Rechtecken wird die tatsächliche Fläche überschätzt (z.B. im ersten Rechteck), manchmal aber auch unterschätzt (z.B. im zweiten Rechteck).

Vorgehen zur Berechnung des Flächeninhalts

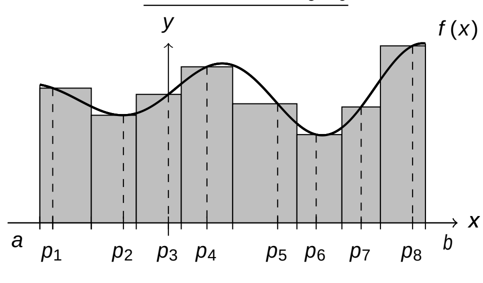
1. Zerlegung von $[a, b]$ durch Teilpunkte $\{x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ der Breite $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

2. Auswahl eines Zwischenpunkts $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in jedem Teilintervall und Näherung des Flächeninhalts durch die so genannte **Riemannsche Summe**

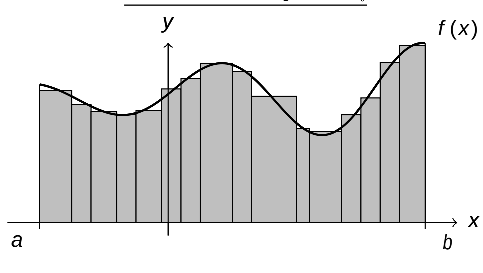
$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

3. Verbesserung der Approximation durch Verkleinerung von $\Delta x_i \to 0$, womit $A_n \to A$ erreicht wird.

ad 1./2. Darstellung A_8



ad 3. Verkleinerung der Δx_i



Bemerkung:

Die Formel der Riemannschen Summe A_n entspricht der Summe der n elementargeometrischen Flächen von Rechtecken der Höhe $f(p_i)$ und Breiten Δx_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Definition 6.1 Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **integrierbar**, wenn jede Folge Riemannscher Summen zu immer feineren Zerlegungen von $[a, b]$ in Teilintervalle,

$$\max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i \to 0$$

gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert wird dann das **bestimmte Integral** von f über $[a, b]$ genannt und geschrieben als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>Bemerkungen zur Notation und Sprachgebrauch</u>

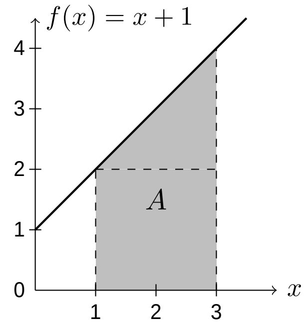
a heißt **untere Integrationsgrenze**

b heißt **obere Integrationsgrenze**

f wird als **Integrand** bezeichnet

x ist die **Integrationsvariable** (wird manchmal als **Integrationsoperator** bezeichnet)

Beispiel 6.1 Zur Illustration der Riemannschen Summe wird im Folgenden ein elementargeometrischer Flächeninhalt unter einer Kurve alternativ über das Riemann-Integral berechnet.



Betrachte die Funktion $f(x) = x + 1$ im Intervall $I = [a, b] = [1, 3]$.

Die Fläche (zusammengesetzt aus einem Quadrat und einem Dreieck) ergibt sich elementargeometrisch zu $A = 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 6$.

Dies ist über die Riemannsche Summe wie folgt approximierbar:

Die n-te Zerlegung des Intervalls sei äquidistant gewählt: $x_i^{(n)} = 1 + \frac{2}{n} \cdot i$ (für $i = 0, 1, \ldots, n$). Damit ist $x_0^{(n)} = 1 = a$ sowie $x_n^{(n)} = 3 = b$ erfüllt. Ferner gilt die Äquidistanz:

$$\Delta x_i^{(n)} = x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} = \frac{2}{n} \quad \text{(unabhängig von } i\text{)}$$

Für die Riemannsche Summe ergibt sich (wähle dabei stets $p_i = x_i$):

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(1 + \tfrac{2}{n} \cdot i\right) + 1\right) \cdot \tfrac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \tfrac{i}{n}\right) \\ &= \frac{4}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} + \tfrac{4}{n^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{=\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= 4 + 2\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = 6 + \tfrac{2}{n} \end{aligned}$$

Im Grenzwert einer unendlich feinen Zerlegung erhält man aus der Riemannschen Summe das erwartete Ergebnis: $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A = 6$.

Satz 6.2 Für $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $c \in [a,b]$
3. $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
4. Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $a \leq b$ ist, dann gilt: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
5. Falls $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ ist, dann gilt: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

<u>Bemerkungen:</u>

Integrale kennen das Vorzeichen der zu integrierenden Funktion, d.h. liegt in einem Teilintervall der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse, so hat er einen negativen Beitrag zum Gesamtwert des Integrals.

Die dritte Aussage des Satzes besagt, dass das Integrieren eine lineare Operation darstellt.

Definition 6.3 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. F heißt **Stammfunktion** von $f : I \to \mathbb{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
Die Menge aller Stammfunktionen von f wird **unbestimmtes Integral** von f genannt und als

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := \{F : I \to \mathbb{R} \mid F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in I\}$$

bezeichnet.

Satz 6.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – HDI)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

1. Die durch
$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad x \in [a,b]$$
definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f.
2. Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann gilt:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

<u>Bemerkungen:</u>

Der HDI besagt insbesondere, dass zur Berechnung von Integralen eine Stammfunktion benötigt wird. Das bestimmte Integral ergibt sich durch Auswertung dieser Stammfunktion.

Das Suchen einer analytischen Stammfunktion kann in bestimmten Fällen sehr schwierig oder sogar unmöglich[3] sein. Die Überprüfung hingegen, ob eine gegebene Funktion F Stammfunktion von f ist, lässt sich durch einfaches Differenzieren meistens recht schnell überprüfen.

Tabelle der Grundintegrale ($c \in \mathbb{R}$ bezeichnet dabei eine beliebige Konstante)

$$
\begin{aligned}
\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \\
\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln|x| + c \quad (x \neq 0) \\
\int \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x) + c \\
\int \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sin(x) + c \\
\int e^{x}\,\mathrm{d}x &= e^{x} + c \\
\int a^{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{a^{x}}{\ln(a)} + c \quad (a > 0, a \neq 1) \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \arctan(x) + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \arcsin(x) + c \quad (|x| < 1) \\
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x &= -\cot(x) + c \quad (x \neq k\pi) \\
\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \tan(x) + c \quad (x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi) \\
\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x &= \cosh(x) + c \\
\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x &= \sinh(x) + c \\
\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,\mathrm{d}x &= -\coth(x) + c \quad (x \neq 0) \\
\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \tanh(x) + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{arsinh}(x) + c
\end{aligned}
$$

[3] Man kann zeigen, dass sich Stammfunktionen von $f(x) = x^x$ oder $g(x) = \exp(-x^2)$ nicht durch elementare Funktionen darstellen lassen.

6.2 Integrationstechniken

Satz 6.5 (Partielle Integration)
Sei $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 6.6 (Substitutionsregel)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann gilt:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(g(x)) + C$$

bzw. für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = F(g(b)) - F(g(a))$$

Idee der Partialbruchzerlegung
Sei f eine echt gebrochenrationale Funktion mit normiertem Nennerpolynom.

Zerlege f in Partialbrüche und nutze für die Integration der auftretenden Partialbrüche folgende Identitäten:

1. Nenner besteht aus (Potenzen von) Polynomen erster Ordnung.
   Seien $A, x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist
$$\int \frac{A}{x - x_0}\,\mathrm{d}x = A \ln|x - x_0| + C$$
$$\int \frac{A}{(x - x_0)^i}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-i)(x-x_0)^{i-1}} + C \text{ falls } i \neq 1$$

2. Nenner mit (Potenzen von) Polynome zweiter Ordnung: Seien $A, B \in \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b^2 - 4c < 0$. Dann ist
$$\begin{aligned}
&\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{2x + b}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B - \frac{bA}{2}}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2}\ln|x^2 + bx + c| + \frac{B - \frac{bA}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \cdot \arctan\Big(\frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}}\Big) + C
\end{aligned}$$
   Integrale der Form
$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^i}\,\mathrm{d}x \text{ für } i > 1$$
   können mit Hilfe von Rekursionsformeln gelöst werden, die in dieser Vorlesung nicht weiter vertieft werden.

Beispiel 6.2 In den nachstehenden Beispielen bezeichnet $c \in \mathbb{R}$ stets eine beliebige Konstante.

(i) Bei der partiellen Integration ist es vorteilhaft, den einfach zu integrierenden Faktor als v' zu wählen. Mit dieser Heuristik ergibt sich für den Integranden $x^2 e^x$ (hier $v' = e^x$):

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \,\mathrm{d}x &= x^2 e^x - \int 2x e^x \,\mathrm{d}x \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x \,\mathrm{d}x \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \\ &= e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + c \end{aligned}$$

(ii) Bei der Substitution ändert sich die Variable, nach der integriert werden soll. Mit $g = \sin(x)$ folgt $\mathrm{d}g = \cos(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int g \,\mathrm{d}g = \frac{1}{2}g^2 + c = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

(iii) Für die Substitution $u = \sqrt{x}$ folgt $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x &= \int e^u \cdot 2u \,\mathrm{d}u \\ &= e^u \cdot 2u - \int 2e^u \,\mathrm{d}u \\ &= 2ue^u - 2e^u + c \\ &= 2e^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - 1\right) + c \end{aligned}$$

Nach der Substitution wurde in diesem Fall eine partielle Integration mit $v' = e^u$ durchgeführt.

(iv) Für folgendes Integral wird die Partialbruchzerlegung angewandt:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Die Nullstellen des Nenners ergeben sich zu $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$. Damit folgt der Ansatz:

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Auf den Hauptnenner gebracht lautet die Bedingung für den Zähler:

$$A(x-1) + B(x+2) = (-A+2B) + (A+B)x \overset{!}{=} 5 + x$$

Dies lässt sich durch folgende Matrixgleichung darstellen und lösen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = -\ln(x+2) + 2\ln(x-1) + c$$

(v) Ein Spezialfall der partiellen Integration ist der sogenannte „**Phönix aus der Asche**“ (manchmal auch als „Jo-Jo-Effekt“ bezeichnet). Hierbei tritt das gesuchte Integral I in einer Integralgleichung auf, sodass I durch Lösen dieser Gleichung bestimmbar ist. Im folgenden Fall wird bei der partiellen Integration zweimal $v' = e^x$ verwendet:

$$\begin{aligned} I = \int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x &= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \underbrace{\int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x}_{=I} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine Integralgleichung $I = e^x(\cos(x) + \sin(x)) - I$, also

$$I = \int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x(\cos(x) + \sin(x)) + c$$

(vi) Aus der Kettenregel beim Ableiten folgt: $[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Daraus ergibt sich die sogenannte **logarithmische Integration**:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

Nachfolgender Integrand besitzt genau diese Struktur:

$$\int \frac{2x + 4x^3}{1 + x^2 + x^4}\,\mathrm{d}x = \ln(1 + x^2 + x^4) + c$$

Anwendung der Integralrechnung zur Bestimmung von Flächen

Das bestimmte Integral gibt die ***Bilanz*** der von dem Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche wieder. Dabei werden Flächen oberhalb der x-Achse positiv und solche unterhalb der x-Achse negativ gezählt.

Zur Bestimmung der ***geometrischen*** Fläche muss das Integral daher aufgeteilt werden, d.h. es müssen insbesondere die Nullstellen des Integranden bestimmt werden.

Über Definitionslücken des Integranden darf bei bestimmten Integralen ***nicht*** integriert werden, sondern das Integral ist aufzuspalten und auf Konvergenz der Teilintegrale hin überprüft werden.

Beispiel 6.3 In den nachstehenden Beispielen sollen die eingeschlossene Flächen berechnet werden:

(i) Für $f(x) = \sin(x)$ und das Intervall $I = [0, \pi]$ ergibt sich aus dem HDI ($\sin(x) \geq 0$ für $x \in I$):

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

(ii) Die Parabel $f(x) = x^2 - 4x - 5$ ist nach oben geöffnet und besitzt die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$. In dem Intervall $I = (-1, 5)$ besitzt f also negative Funktionswerte, weshalb für die eingeschlossene Fläche gilt:

$$A = -\int_{-1}^5 (x^2 - 4x - 5)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x\right]_{-1}^5 = -\left(-\frac{100}{3} - \frac{8}{3}\right) = 36$$

(iii) Die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$ besitzt drei Nullstellen, $x_1 = 1$ und $x_{2;3} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$, also $x_2 \approx 0,62$ und $x_3 \approx -1,62$. Aufgrund des Verhaltens von f für $x \to \infty$ besitzt f negative Funktionswerte für $x \in (x_2, x_1)$ und positive Funktionswerte für $x \in (x_3, x_2)$. Es ergibt sich:

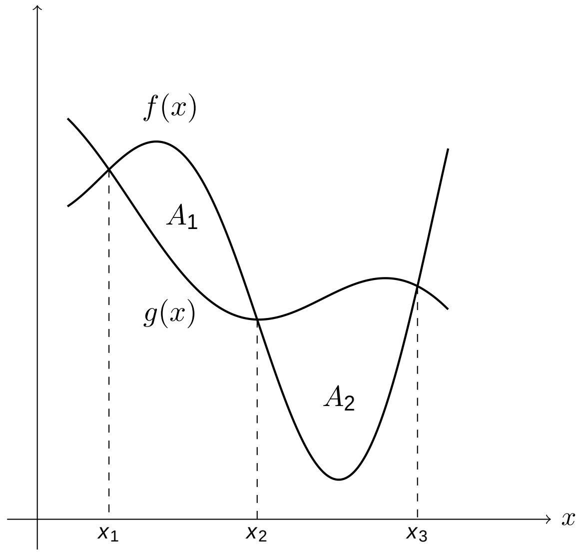
$$A_1 = -\int_{x_2}^{x_1} (x^3 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x\right]_{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})}^{1} = -\frac{11}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{5} \approx 0,02$$

Ferner gilt für den Flächenanteil mit positiven Funktionswerten:

$$A_2 = \int_{x_3}^{x_2} (x^3 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x\right]_{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} = \frac{5}{4}\sqrt{5} \approx 2,80$$

Insgesamt ergibt sich ein Flächeninhalt von $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{8}\left(-11 + 15\sqrt{5}\right) \approx 2,82$

(iv) Möchte man die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen f und g berechnen, so ist zunächst festzustellen, welche Funktion in welchen Bereichen die größere darstellt. Es gilt illustrativ:



Für die eingeschlossene Fläche gilt:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\big(f(x) - g(x)\big)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} \underbrace{\big(g(x) - f(x)\big)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x \geq 0$$

(v) Flächen können auch bis in die Unendlichkeit reichen ohne selbst zu divergieren. Betrachte dazu das **uneigentliche Integral** von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \in [1, \infty)$:

$$\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

Im Grenzwert $b \to \infty$ gilt:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

Uneigentliche Integrale müssen nicht immer existieren, wie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \in (0, 1)$ zeigt:

$$I(a) = \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \frac{1}{a} - 1 \quad (\text{mit } 0 < a < 1)$$

Es gilt im Grenzwert $\lim\limits_{a \to 0^+} I(a) = \infty$, d.h. das uneigentliche Integrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ existiert nicht.

(vi) Das nachstehende Beispiel zeigt, dass bei der Integration über Definitionslücken/Polstellen hinweg unbedingt eine Aufteilung in Teilintervalle und der explizite Nachweis der Konvergenz erfolgen muss. Betrachtet man wieder $f(x) = \frac{1}{x^2}$ im symmetrischen Intervall $[-2, 2]$, so ist darin die Null enthalten, für die f nicht ausgewertet werden kann.

Es ist **falsch** wie folgt zu rechnen: $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{(-2)}\right) = -1$

Dies ist ein negatives Ergebnis für eine Funktion, die im gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ strikt positiv ist. Das ist sicherlich nicht das richtige Ergebnis!
Der Fehler besteht darin, dass man ohne Berücksichtigung der Polstelle den HDI angewandt hat. Vielmehr ist das Integral aufzuspalten. Aufgrund der Symmetrie (f ist eine gerade Funktion) ergibt sich:

$$\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2\int_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{2} = \infty$$

Das Ergebnis ist diesmal positiv, sogar unendlich groß. Das dem gesuchten Integral zugrunde liegende uneigentliche Integral existiert nicht.

(vii) Zuletzt soll die *Fläche eines Viertelkreises* mithilfe von Integralrechnung bestimmt werden. Mittels der Substitution $x = \sin(u)$ mit $\mathrm{d}x = \cos(u)\,\mathrm{d}u$ ergibt sich für die Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2(u)} \cdot \cos(u)\,\mathrm{d}u = \int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$$

Aus den Additionstheoremen[4] (alternativ mittels partieller Integration) ergibt sich:

$$\int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int (\cos(2u)+1)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\sin(2u) + \frac{u}{2} + c = \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(x) + c$$

Wieder aus den Additionstheoremen[5] ergibt sich für den ersten Term:

$$\frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) = \frac{1}{2}\sin(\arcsin(x)) \cdot \cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Dabei wurde die Identität $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ verwendet. Insgesamt ergibt sich als Stammfunktion:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) + c$$

Um die Fläche A des Viertelkreises zu bestimmen, ist mithilfe dieser Stammfunktion das bestimmte Integral von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ über das Intervall $[0, 1]$ zu berechnen:

$$A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\arcsin(1) = \frac{\pi}{4}$$

[4] $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
[5] $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

A Projekte

Projekte dienen der **Wiederholung** und **Anwendung** der spezifischen Kapitelinhalte. Eine eigenständige Bearbeitung sei vor der Durchsicht der Lösungsvorschläge empfohlen.

A.1 Projekt 1 - Der binomische Lehrsatz

In diesem Projekt zum Kapitel 1 „Grundlagen“ soll der binomische Lehrsatz und die damit im Zusammenhang stehenden mathematischen Werkzeuge entwickelt werden.

Aufgabe 1 Permutationen

(a) Wie lautet die Definition der Fakultät $n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$?

(b) Die Fakultät ist eine sehr schnell ansteigende Funktion. Überprüfen Sie (z.B. mit Ihrem Taschenrechner), für welches n das Ergebnis erstmals über 1 Million liegt. Für welches n wird 10^{100} erreicht?

(c) Betrachten Sie eine Menge, in der $n \in \mathbb{N}_0$ unterscheidbare Objekte enthalten sind. Überlegen Sie, dass $n!$ die Anzahl der möglichen Anordnungen der Objekte angibt. Dieser Sachverhalt wird als **Permutation** (lat. permutare = tauschen, vertauschen) bezeichnet.

Aufgabe 2 Kombinationen

(a) Betrachten Sie eine Menge, in der $n \in \mathbb{N}_0$ unterscheidbare Objekte enthalten sind. Aus dieser sollen k Elemente *ohne Zurücklegen* ausgewählt werden ($k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$). Dies soll *unter Berücksichtigung der Reihenfolge* erfolgen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

(b) Betrachten Sie erneut eine Menge, in der n unterscheidbare Objekte enthalten sind. Aus dieser sollen wieder k Elemente *ohne Zurücklegen* ausgewählt werden, nun aber *ohne Berücksichtigung der Reihenfolge*. Wie viele Möglichkeiten gibt es diesmal? Dieser Sachverhalt wird als **Kombination** (lat. combinare = vereinen, kombinieren) bezeichnet.

Aufgabe 3 Der **Binomialkoeffizient**[1] ist definiert für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Für Binomialkoeffizienten müssen die enthaltenen Fakultäten oftmals nur teilweise ausgerechnet werden. Berechnen Sie nachstehende Koeffizienten **ohne** Taschenrechner:

(a) $\binom{4}{2}$

(b) $\binom{8}{5}$

(c) $\binom{10}{1}$

(a) $\binom{10}{9}$

(a) $\binom{201}{2}$

(f) $\binom{1000}{998}$

(g) $\binom{500}{158} \Big/ \binom{500}{343}$

(h) $\binom{n+1}{n}$

(i) $\binom{n}{n-k}$

[1] Auf vielen Taschenrechnern kann der Binomialkoeffizient mit nCr eingegeben werden.

Aufgabe 4 Das **Pascalsches Dreieck** stellt in jeder Zeile $n \in \mathbb{N}_0$ die $(n+1)$ möglichen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ in einer übersichtlichen Form dar.

(a) Weisen Sie die nachstehende Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten nach:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

(b) Werten Sie die ersten neun Zeilen des Pascalschen Dreiecks aus $(n = 0, 1, \ldots, 8)$.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}
\end{array}$$

Aufgabe 5 Der **binomische Lehrsatz** lautet für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(a) Zeigen Sie, dass der binomische Lehrsatz für $n = 2$ die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ reproduziert.

(b) Betrachten Sie $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$. Begründen Sie, wie bei diesem Produkt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ins Spiel kommt, d.h. überlegen Sie, wie sich dieses Produkt in eine Problemstellung der Form „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" umformulieren lässt.

(c) Berechnen Sie mithilfe des Pascalschen Dreiecks explizit $(a+b)^n$ für $n \in \{3, 5, 8\}$.

(d) Geben Sie auch eine explizite Form für $(a-b)^5$ und $(a-b)^6$ an.

Aufgabe 6 Addiert man alle Zahlen der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks $(n \in \mathbb{N}_0)$, so berechnet man die nachstehende Summe aus $n+1$ Binomialkoeffizienten:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(a) Berechnen Sie S_n, mindestens für $n = 1, \ldots, 6$ direkt aus dem Pascalschen Dreieck. Können Sie eine Gesetzmäßigkeit erkennen, die diesen Ergebnissen zugrunde liegt?

(b) Versuchen Sie mit dem binomischen Lehrsatz die von Ihnen vermutete Gesetzmäßigkeit von S_n nachzuweisen.

(c) Berechnen Sie abschließend die alternierende Summe einer Zeile des Pascalschen Dreiecks und zeigen Sie, dass diese unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Im Folgenden wird ein **Lösungsvorschlag** für das Projekt vorgestellt

Aufgabe 1 Permutationen

(a) Die Fakultät ist definiert als Funktion auf $\mathbb{N}_0$ durch $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (für $n > 0$) und $0! = 1$. Alternativ ist eine rekursive Definition möglich: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ mit $0! = 1$.

(b) $9! = 362.880 \quad \Rightarrow \quad 10! = 3.628.800 > 10^6$

$69! > 1,71 \cdot 10^{98} \quad \Rightarrow \quad 70! > 10^{100}$

Weiterführende Bemerkung: Die Zahl 10^{100} wird als **Googol** bezeichnet. Ferner bezeichnet man 10^{Googol} als **Googolplex**, darauf aufbauend $10^{\text{Googolplex}}$ als **Googolplexplex** oder Googol-2-plex. Weitere Steigerungen sind rekursiv definiert:

$$10^{\text{Googol-}n\text{-plex}} = \text{Googol-}(n+1)\text{-plex}$$

(c) Betrachte die Menge $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit n unterscheidbaren Objekten. Eine Anordnung dieser Elemente kann als Tupel $x \in M_n^n$ verstanden werden, sodass jedes $x_i \in M_n$ genau einmal auftritt. Für $n = 4$ etwa ergibt sich[1]:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{24 = 4!\ \text{Möglichkeiten}}$

Allgemeine Betrachtung mit n Objekten:

	1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	...	$(n-1)$-te Stelle	n-te Stelle
#Möglichkeiten	n	$(n-1)$	$(n-2)$	...	2	1

$\Rightarrow$ Insgesamt gibt es $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, die n unterscheidbaren Objekte anzuordnen ($\Rightarrow$ **Permutationen**).

Aufgabe 2 Kombinationen

(a) Betrachte wieder $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, aus der $k \leq n$ Elemente ohne Zurücklegen ausgewählt werden, d.h. Elemente können nicht doppelt ausgewählt werden. Dies kann dargestellt werden durch ein Tupel $x \in M_n^k$, sodass jedes $x_i \in M_n$ höchstens einmal auftritt. Für $n = 4$ und $k = 2$ etwa ergibt sich (wieder unter Verwendung der vereinfachten Schreibweise für Tupel):

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{12 = \frac{4!}{2!}\ \text{Möglichkeiten}}$

[1] In der Tabelle wird für das Tupel $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M_4^4$ die vereinfachte Schreibweise $x_1x_2x_3x_4$ verwendet.

Allgemeine Betrachtung mit n Objekten, wovon $k \leq n$ ausgewählt werden:

	1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	...	k-te Stelle
#Möglichkeiten	n	$(n-1)$	$(n-2)$	...	$(n-k+1)$

Die Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \underbrace{\frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}_{=1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Insgesamt gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Objekten genau k unter Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.

(b) Im nächsten Schritt soll die Reihenfolge der k gezogenen Elemente der Menge M_n nicht mehr berücksichtigt werden. Dies kann dargestellt werden, indem die Auswahl nicht als Tupel, sondern als k-elementige Teilmenge von M_n betrachtet wird. Für $n = 4$ und $k = 2$ etwa ergeben sich folgende Möglichkeiten (wieder unter Verwendung der vereinfachten Schreibweise für Tupel):

$$
\underbrace{\begin{matrix} 12 & & \\ 13 & 23 & \\ 14 & 24 & 34 \end{matrix}}_{6 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \text{ Möglichkeiten}}
$$

Allgemeine Betrachtung mit n Objekten, wovon $k \leq n$ ausgewählt werden: Für ein gezogenen k-Tupel $x \in M_n^k$, bei der die Reihenfolge relevant ist, existieren $k!$ mögliche Anordnungen (Permutationen). Um diesen Faktor reduziert sich dich Anzahl der Möglichkeiten.

$\Rightarrow$ Insgesamt gibt es $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Objekten genau k ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. Dies entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n unterscheidbaren Objekten ($\Rightarrow$ **Kombinationen**).

Aufgabe 3 Der Binomialkoeffizient ist definiert für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Durch Kürzen lassen sich viele Binomialkoeffizienten direkt auswerten, ohne sehr große Zwischenergebnisse in Zähler und Nenner explizit berechnen zu müssen:

(a) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$

(b) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 6} = 8 \cdot 7 = 56$

(c) $\binom{10}{1} = \frac{10 \cdot 9!}{1 \cdot 9!} = 10$

(d) $\binom{10}{9} = \dfrac{10\quad 9!}{9!\quad 1} = 10$

(e) $\binom{201}{2} = \dfrac{201\quad 200\quad 199!}{2\quad 199!} = 201\quad 100 = 20.100$

(f) $\binom{1000}{998} = \dfrac{1000\quad 999\quad 998!}{998!\quad 2} = 500\quad 999 = 499.500$

(g) $\binom{500}{158}\Big/\binom{500}{343} = \dfrac{500!\quad 343!\quad 157!}{158!\quad 342!\quad 500!} = \dfrac{343\quad 342!\quad 157!}{158\quad 157!\quad 342!} = \dfrac{343}{158}$

(h) $\binom{n+1}{n} = \dfrac{(n+1)!}{n!\quad (n+1\quad n)!} = \dfrac{(n+1)\quad n!}{n!\quad 1} = n+1$

(i) $\binom{n}{n\quad k} = \dfrac{n!}{(n\quad k)!\quad (n\quad (n\quad k))!} = \dfrac{n!}{(n\quad k)!\quad k!} = \dfrac{n!}{k!\quad (n\quad k)!} = \binom{n}{k}$

Bemerkung: Die allgemein festgestellte Symmetrie in Teilaufgabe (i) war für den Spezialfall $n = 10$ und $k = 1$ und $k = 9$ bereits in den Teilaufgaben (c) und (d) zu beobachten.

Aufgabe 4

(a) Die behauptete Rekursionsformel $\binom{n}{k} = \binom{n\quad 1}{k\quad 1} + \binom{n\quad 1}{k}$ kann durch direkte Rechnung nachgewiesen werden. Erweitert man die rechte Seite auf den Hauptnenner, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\binom{n\quad 1}{k\quad 1} + \binom{n\quad 1}{k} &= \frac{(n\quad 1)!}{(k\quad 1)!\quad \underbrace{(n\quad 1\quad (k\quad 1))!}_{=(n\quad k)!}} + \frac{(n\quad 1)!}{k!\quad (n\quad 1\quad k)!} \\
&= \frac{(n\quad 1)!\quad k}{\underbrace{(k\quad 1)!\quad (n\quad k)!\quad k}_{=k!\;(n\quad k)!}} + \frac{(n\quad 1)!\quad (n\quad k)}{\underbrace{k!\quad (n\quad 1\quad k)!\quad (n\quad k)}_{=k!\;(n\quad k)!}} \\
&= \frac{(n\quad 1)!\quad (k+n\quad k)}{k!\quad (n\quad k)!} \\
&= \frac{n!}{k!\quad (n\quad k)!} = \binom{n}{k} \qquad \text{X}
\end{aligned}$$

(b) Die Rekursionsformel aus der Teilaufgabe (a) erlaubt es, Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck als Summe darüber stehender Binomialkoeffizienten zu berechnen.

Für den ersten und letzten Binomialkoeffizienten einer Zeile gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

1	n $S_0 = 1$
1 1	n $S_1 = 2$
1 2 1	n $S_2 = 4$
1 3 3 1	n $S_3 = 8$
1 4 6 4 1	n $S_4 = 16$
1 5 10 10 5 1	n $S_5 = 32$
1 6 15 20 15 6 1	n $S_6 = 64$
1 7 21 35 35 21 7 1	n $S_7 = 128$
1 8 28 56 70 56 28 8 1	n $S_8 = 256$

Aufgabe 5 Der **binomische Lehrsatz** lautet für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(a) Für $n = 2$ erhält man aus dem binomischen Lehrsatz eine bekannte binomische Formel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} \\
&= \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0 \\
&= 1 \cdot 1 \cdot b^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot a^2 \cdot 1 \\
&= b^2 + 2ab + a^2
\end{aligned}$$

(b) Um die Richtigkeit des binomischen Lehrsatzes zu zeigen, betrachtet man die ausgeschriebene linke Seite $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$, die mit n Faktoren enthält.

- $\to$ Ausmultiplizieren ergibt z.B. Terme der Form a^n, $a^2 b^{n-2}$, ..., oder auch b^n.
- $\to$ Der allgemeine Term lautet $\# a^k b^{n-k}$ mit $0 \leq k \leq n$ und einem noch zu bestimmenden Vorfaktor $\#$.

  Der Term $a^k b^{n-k}$ tritt jedes Mal dann auf, wenn aus den n Faktoren $(a+b)$ genau k-mal der erste Summand a ausgewählt wird. Es ist dabei egal, aus welchen Faktoren genau das a stammt, relevant ist ausschließlich, dass es genau k-mal ausgewählt wird. Dies entspricht der Problemstellung „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“. Die n Faktoren $(a+b)$ spielen dabei die Rolle der n-unterscheidbaren Objekte und k beschreibt, wie viele der n Faktoren auszuwählen sind, aus denen der Summand a beiträgt.
- $\to$ Damit gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, einen Term der Form $a^k b^{n-k}$ beim Ausmultiplizieren zu erhalten. In einem Extrem kann gar kein Summand a beitragen ($k = 0$), im anderen Extrem kann der Summand a aus jedem Faktor ausgewählt werden ($k = n$); für beide Fälle gibt es nur eine Kombinationsmöglichkeit: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Damit erhält man den binomischen Lehrsatz durch Ausmultiplizieren und Berücksichtigung der kombinatorischen Vorfaktoren:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n\text{-mal}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad ✓$$

(c) Es gilt:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} b^3 + \binom{3}{1} ab^2 + \binom{3}{2} a^2 b + \binom{3}{3} a^3 = b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$$

$$(a+b)^5 = b^5 + 5ab^4 + 10a^2 b^3 + 10a^3 b^2 + 5a^4 b + a^5$$

$$(a+b)^8 = b^8 + 8ab^7 + 28a^2 b^6 + 56a^3 b^5 + 70a^4 b^4 + 56a^5 b^3 + 28a^6 b^2 + 8a^7 b + a^8$$

(d) Für Ausdrücke der Form $(a - b)^n$ setzt man $b \mapsto -b$ im binomischen Lehrsatz, d.h. alle ungeraden Exponenten von b führen auf ein (zusätzliches) Minuszeichen:

$$(a - b)^5 = -b^5 + 5ab^4 - 10a^2b^3 + 10a^3b^2 - 5a^4b + a^5$$

$$(a - b)^6 = b^6 - 6ab^5 + 15a^2b^4 - 20a^3b^3 + 15a^4b^2 - 6a^5b + a^6$$

Aufgabe 6 Addiert man alle Zahlen der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ($n \in \mathbb{N}_0$), so berechnet man die nachstehende Summe aus $n + 1$ Binomialkoeffizienten:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(a) Im oben stehenden Pascalschen Dreieck der Aufgabe 4(b) ist S_n bis einschließlich $n = 8$ angegeben. Daraus ergibt sich die Vermutung: $S_n \stackrel{?}{=} 2^n$.

(b) Setzt man im binomischen Lehrsatz $a = b = 1$, so ergibt sich unmittelbar der Nachweis der Vermutung:

$$(1 + 1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = S_n$$

Es gilt also: $S_n = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Die alternierende Summe einer Zeile des Pascalschen Dreiecks ist für $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Setzt man im binomischen Lehrsatz $a = -1$ und $b = 1$, so erhält man für $n \in \mathbb{N}$

$$(-1 + 1)^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = A$$

Die alternierende Zeilensumme im Pascalschen Dreieck verschwindet also für alle Zeilen mit Ausnahme von $n = 0$, da es für diese nur einen Binomialkoeffizienten $\binom{0}{0} = 1$ gibt. Es gilt also: $A = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

A.2 Projekt 2 - Harmonische Schwingungen und deren Überlagerung

In diesem Projekt zum Kapitel 2 „Komplexe Zahlen und komplexe Funktionen“ soll eine elegante Art der Überlagerung harmonischer Schwingungen entwickelt werden.

Aufgabe 1 Zum Aufwärmen

(a) Wie lautet die Eulersche Formel? Skizzieren Sie die Identität in der Gaußschen Ebene und erläutern Sie den Zusammenhang zur Definition der Sinus- und Kosinusfunktion.

(b) Finden Sie alle Lösungen $\varphi \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen:

$$\text{(i) } e^{i\varphi} = 42 + i \qquad \text{(ii) } e^{i\varphi} = -i \qquad \text{(iii) } e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}$$

(c) Nutzen Sie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus,

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

um die beiden nachstehenden Identitäten nachzuweisen:

$$\text{(i) } \sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{(ii) } \sin(x) + \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

(d) Wie lautet die allgemeine Form einer harmonischen Schwingung $f(t)$? Nennen Sie die drei Parameter einer harmonischen Schwingung und erläutern Sie deren Bedeutung.

Aufgabe 2 Überlagerung harmonischer Schwingungen mit gleicher Amplitude A

(a) Betrachten Sie zwei harmonische Schwingungen mit gleicher Amplitude A und gleicher (Kreis)frequenz ω aber zwei individuellen Phasenverschiebungen φ_1, φ_2:

$$f_1(t) = A\sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad f_2(t) = A\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Zeigen Sie, dass die Überlagerung der beiden Schwingungen,

$$f_a(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

wieder eine harmonische Schwingung $f_a(t) = \hat{A}\sin(\omega t + \hat{\varphi})$ darstellt. Geben Sie die Amplitude $\hat{A}$ sowie Phasenverschiebung $\hat{\varphi}$ von $f_a(t)$ explizit an.
Zusatzfrage: Ist es möglich, dass $f_a(t)$ die gleiche Amplitude A besitzt wie $f_1(t)$ und $f_2(t)$?

(b) Betrachten Sie nun zwei harmonische Schwingungen unterschiedlicher Frequenz $\omega_1 \neq \omega_2$:

$$f_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad f_2(t) = A\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Begründen Sie, warum die Überlagerung $f_b(t) = f_1(t) + f_2(t)$ in diesem Fall *keine* harmonische Schwingung darstellt. Weisen Sie also nach, dass $f_b(t) \neq \hat{A}\sin(\hat{\omega} t + \hat{\varphi})$ mit *zeitunabhängigen* Konstanten $\hat{A}, \hat{\omega}, \hat{\varphi} \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Skizzieren[1] Sie typische Überlagerungen $f_a(t)$ und $f_b(t)$ der beiden Teilaufgaben.

[1] Sie können auch Online-Tools nutzen, z.B. den unter freier Lizenz verfügbaren Grafikrechner von GeoGebra: https://www.geogebra.org/graphing

Vorbemerkung: Die **Überlagerung von harmonischen Schwingungen der gleichen Frequenz** ist in der Praxis die häufigste und damit wichtigste Anwendung. Dieser Fall wird im Folgenden ausschließlich betrachtet. Unter Nutzung der komplexen Zahlen ist es möglich, diese allgemeine Überlagerung von harmonischen Schwingungen ohne aufwändige Additionstheoreme zu berechnen. Ziel ist es, diese elegante Methode zu entwickeln und anzuwenden.

Aufgabe 3 Entwicklung der Methode
Betrachten Sie die Überlagerung $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ der harmonischen Schwingungen

$$f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad f_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Imaginärteile der beiden Funktionen $g_j(t) = A_j e^{i(\omega t+\varphi_j)} \in \mathbb{C}$ mit den harmonischen Schwingungen $f_j(t)$ übereinstimmen $(j = 1, 2)$.

(b) Zeigen Sie, dass nach dem Übergang ins Komplexe die Überlagerung $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ in der Form $g(t) = z \cdot e^{i\omega t}$ mit $z \in \mathbb{C}$ geschrieben werden kann. Geben Sie z explizit an.

(c) Nehmen Sie an, dass $z \in \mathbb{C}$ in Exponentialform $z = |z|e^{i\varphi}$ vorliegt. Weisen Sie für die Überlagerung $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ nach, wobei für die Amplitude $A = |z| \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4 Anwendung der Methode

(a) Zeigen Sie mit der Methode aus Aufgabe 3, dass sich für $f_1(t) = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{5\pi}{12}\right)$ und $f_2(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ die Überlagerung $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ ergibt.

(b) Zeigen Sie mit der Methode aus Aufgabe 3, dass sich für $f_1(t) = 3\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ und $f_2(t) = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ die Überlagerung $f(t) = A\sin(2\pi t + \varphi)$ mit Amplitude $A \approx 2{,}67$ und Phasenverschiebung $\varphi \approx 4{,}85$ ergibt.

Aufgabe 5 Weiterentwicklung/Modifikation der Methode

(a) Überlegen Sie, wie die Methode aus Aufgabe 3 weiterentwickelt werden kann, um mehrere $(n \in \mathbb{N})$ Schwingungen der Form $f_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi_j)$ zu überlagern.

(b) Wie kann die Methode modifiziert werden, um $n \in \mathbb{N}$ Schwingungen zu überlagern, die alle die Darstellung $f_j(t) = A_j \cos(\omega t + \varphi_j)$ besitzen?

(c) Wie gehen Sie vor, um verschiedene Sinusfunktionen $f_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi_j)$ mit Kosinusfunktionen $f_k(t) = A_k \cos(\omega t + \varphi_k)$ zu überlagern?

Aufgabe 6 Anwendungsbeispiel aus der Physik/Elektrotechnik
Zeigen Sie, dass eine Überlagerung der drei Spannungen U_i mit $U_0 > 0$ und

$$\begin{aligned} U_1(t) &= U_0 \sin(\omega t) \\ U_2(t) &= 2U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ U_3(t) &= \sqrt{3}U_0 \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

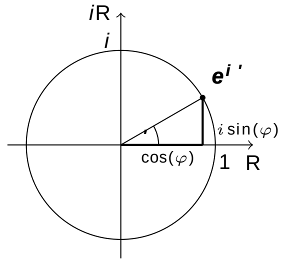
zu einem vollständigen Aufheben der Spannungen führt, also $U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) = 0$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Im Folgenden wird ein **Lösungsvorschlag** für das Projekt vorgestellt

Aufgabe 1 Zum Aufwärmen

(a) Die Eulersche Formel lautet für $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$



Alle Werte von $e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ liegen auf dem komplexen Einheitskreis, denn $|e^{i\varphi}| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

(b) (i) $e^{i\varphi} = 42 + i$ ist für *kein* $\varphi \in \mathbb{R}$ erfüllt, denn die komplexe Zahl auf der linken Seite hat stets Betrag 1, $|e^{i\varphi}| = 1$, für die rechte Seite gilt hingegen: $|42+i| = \sqrt{42^2+1} > 42$. Die Lösungsmenge ist also leer: $L = \emptyset$.

(ii) $e^{i\varphi} = -i$ wird zunächst erfüllt durch $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Aufgrund der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion ergibt sich eine *unendliche* Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(iii) Es gilt allgemein für $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$. Für $z = e^{i\varphi}$ folgt:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\right) &= 2\cos(\varphi) = c \\ \Leftrightarrow \quad \cos(\varphi) &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Aufgrund der Periodizität der Kosinusfunktion besitzt diese Gleichung für $|c| \leq 2$ *unendlich viele* Lösungen für φ:

$$L = \begin{cases} \left\{\arccos\left(\frac{c}{2}\right) + 2\pi k, \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} & |c| \leq 2 \\ \emptyset & |c| > 2 \end{cases}$$

(c) (i) Aus dem Additionstheorem (Thm) für $\sin(x+y)$ ergibt sich direkt:

$$\sin(x) = \sin(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}) \overset{\text{Thm}}{=} \sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{x}{2}) = 2\cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{x}{2}) \quad \checkmark$$

(ii) Die Identität $\sin(x) + \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$ lässt sich nachweisen, indem man die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus (Thm) auf die rechte Seite anwendet, den trigonometrischen Pythagoras[1] (TP) nutzt und mithilfe der Identität des vorherigen Teilaufgabe (i) zusammenfasst:

$$\begin{aligned} &2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \overset{\text{Thm}}{=} \\ &= 2\left[\cos(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{y}{2}) + \sin(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{y}{2})\right]\left[\sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{y}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{y}{2})\right] \\ &= 2\left[\cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{x}{2})\cos^2(\tfrac{y}{2}) + \cos^2(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{y}{2})\sin(\tfrac{y}{2}) \right. \\ &\qquad \left. + \sin^2(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{y}{2})\sin(\tfrac{y}{2}) + \cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{x}{2})\sin^2(\tfrac{y}{2})\right] \\ &\overset{\text{TP}}{=} 2\left[\cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{x}{2}) \cdot 1 + \cos(\tfrac{y}{2})\sin(\tfrac{y}{2}) \cdot 1\right] \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \sin(x) + \sin(y) \end{aligned}$$

[1] Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(d) Eine harmonische Schwingung ist eine Funktion $f(t) = f(t; A, \omega, \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi)$ mit

$t \in \mathbb{R}$: Zeit
$A > 0$: Amplitude
$\omega > 0$: Kreisfrequenz (Winkelgeschwindigkeit)
$\varphi \in \mathbb{R}$: Phasenverschiebung

Bemerkung: Eine äquivalente Darstellung mit der Kosinusfunktion anstelle der Sinusfunktion kann mit einer Phasenverschiebung um 90° *erreicht werden:* $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 Überlagerung harmonischer Schwingungen mit gleicher Amplitude A

(a) Für zwei harmonische Schwingungen mit gleicher Amplitude A und gleicher (Kreis)frequenz ω aber zwei individuellen Phasenverschiebungen φ_1, φ_2:

$$f_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad f_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi_2)$$

ist die Überlagerung $f_a(t) = f_1(t) + f_2(t)$ zu bestimmen. Mit der Identität aus Aufgabe 1(c) für $x = \omega t + \varphi_1$ und $y = \omega t + \varphi_2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_a(t) &= A(\sin(x) + \sin(y)) \\ &= 2A \cos(\tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2}) \sin(\tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{2}) \\ &= 2A \cos(\tfrac{\varphi_1}{2} - \tfrac{\varphi_2}{2}) \sin(\omega t + \tfrac{\varphi_1}{2} + \tfrac{\varphi_2}{2}) \\ &= \hat{A} \sin(\omega t + \hat{\varphi}) \end{aligned}$$

mit der Amplitude $\hat{A} = 2A \cos(\frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_2}{2})$ und Phasenverschiebung $\hat{\varphi} = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2}$ der Überlagerung.
Zusatzantwort: Es soll $\hat{A} = A$ gelten, also

$$\begin{aligned} 2A \cos(\tfrac{\varphi_1}{2} - \tfrac{\varphi_2}{2}) = A \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(\tfrac{\varphi_1}{2} - \tfrac{\varphi_2}{2}) = \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad |\varphi_1 - \varphi_2| \in \{2 \arccos(\tfrac{1}{2}) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\Leftrightarrow \quad |\varphi_1 - \varphi_2| \in \{2\pi \left(\tfrac{1}{3} + k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Ferner gilt $\hat{A} = 0$, falls $|\varphi_1 - \varphi_2| \in \{2\pi \left(\frac{1}{2} + k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Es sind nun zwei harmonische Schwingungen unterschiedlicher Frequenz $\omega_1 \neq \omega_2$,

$$f_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad f_2(t) = A \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

zu überlagern. Wieder mit der Identität aus Aufgabe 1(c) für $x = \omega_1 t + \varphi_1$ und $y = \omega_2 t + \varphi_2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_b(t) &= A(\sin(x) + \sin(y)) \\ &= 2A \cos(\tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2}) \sin(\tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{2}) \\ &= 2A \cos\left((\tfrac{\omega_1}{2} - \tfrac{\omega_2}{2})t + \tfrac{\varphi_1}{2} - \tfrac{\varphi_2}{2}\right) \sin\left((\tfrac{\omega_1}{2} + \tfrac{\omega_2}{2})t + \tfrac{\varphi_1}{2} + \tfrac{\varphi_2}{2}\right) \\ &= \hat{A}(t) \sin(\hat{\omega} t + \hat{\varphi}) \end{aligned}$$

mit der *zeitabhängige* Amplitude $\hat{A}(t) = 2A \cos\left((\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2}{2})t + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_2}{2}\right)$, Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega} = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$ und Phasenverschiebung $\hat{\varphi} = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2}$ der Überlagerung.

(c) Typische Überlagerungen von $f_a(t)$ und $f_b(t)$ können mit Tools wie etwa dem frei verfügbaren Grafikrechner von GeoGebra (`https://www.geogebra.org/graphing`) visualisiert und untersucht werden.

Aufgabe 3 Entwicklung der Methode

Betrachtet wird die Überlagerung $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ von zwei harmonischen Schwingungen

$$f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad f_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

(a) Mit den komplexen Funktionen $g_j(t) = A_j e^{i(\omega t + \varphi_j)} = A_j(\cos(\omega t + \varphi_j) + i \sin(\omega t + \varphi_j)) \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2)$ folgt:

$$\operatorname{Im} g_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi_j) = f_j(t)$$

(b) Überlagert man die komplexe Fortsetzung g_j zu $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, so ergibt sich:

$$g(t) = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = e^{i\omega t}\left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right) := e^{i\omega t} \cdot z$$

mit der komplexen Zahl $z = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} \in \mathbb{C}$.

(c) Angenommen, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ liegt bereits in Exponentialform $z = |z| e^{i\varphi}$ vor, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(t) = z \cdot e^{i\omega t} &= |z| e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \\ &= |z| e^{i(\omega t + \varphi)} \\ &= |z|(\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den Imaginärteil auf beiden Seiten, so erhält man:

links: $\operatorname{Im} g(t) = \operatorname{Im}(g_1(t) + g_2(t)) = f_1(t) + f_2(t) = f(t)$
rechts: $\operatorname{Im}(\dots) = |z| \sin(\omega t + \varphi)$

Es folgt: $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ mit der Amplitude $A = |z| \geq 0$.

Zusammenfassung der Methode

1. Zu gegebenen $f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $f_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ ist $z = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} \in \mathbb{C}$
2. Mithilfe der Eulerschen Formel kann z zunächst in kartesischen Koordinaten dargestellt werden, $z = x + iy$, um es anschließend in Exponentialform umzuschreiben: $z = |z| e^{i\varphi}$.
3. Die gesuchte Überlagerung lautet dann: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = |z| \sin(\omega t + \varphi)$

Aufgabe 4 Anwendung der Methode

(a) Für $f_1(t) = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{5\pi}{12}\right)$ und $f_2(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ gilt:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{2}\Big(\underbrace{\cos(\tfrac{5\pi}{12})}_{=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} + i \underbrace{\sin(\tfrac{5\pi}{12})}_{=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}\Big) + \Big(\underbrace{\cos(-\tfrac{\pi}{3})}_{=\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{3})}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da $\operatorname{Re} z > 0$ und $\operatorname{Im} z > 0$ gilt, liegt z im ersten Quadranten Q_1 mit $|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ und $\varphi = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$. Damit folgt für die Überlagerung: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin(t + \frac{\pi}{6})$.

(b) Für $f_1(t) = 3\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ und $f_2(t) = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ gilt:

$$\begin{aligned} z &= 3e^{-i\frac{\pi}{2}} + \tfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= 3\big(\underbrace{\cos(-\tfrac{\pi}{2})}_{=0} + \underbrace{i\sin(-\tfrac{\pi}{2})}_{=-1}\big) + \tfrac{1}{2}\big(\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{4})}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{4})}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\big) = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 3\right) \end{aligned}$$

Da Re $z > 0$ und Im $z < 0$ gilt, liegt z im vierten Quadranten Q_3 mit

$$|z| = \sqrt{\frac{2}{16} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 3\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{37 - 6\sqrt{2}} \approx 2,67$$

$$\varphi = 2\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4\,|z|}\right) = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{74 - 12\sqrt{2}}}\right) \approx 4,85$$

Es folgt für die Überlagerung: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A\sin(2\pi t + \varphi)$ mit $A \approx 2,67$, $\varphi \approx 4,85$.

Aufgabe 5 Weiterentwicklung/Modifikation der Methode

(a) Bei mehreren $f_j(t) = A_j\sin(\omega t + \varphi_j)$, $j = 1, \ldots, n$, ist $z \in \mathbb{C}$ bestimmt durch

$$z = A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2} + A_3e^{i\varphi_3} + \ldots + A_ne^{i\varphi_n} = \sum_{j=1}^{n} A_je^{i\varphi_j}$$

Für dieses $z \in \mathbb{C}$ ist zunächst die kartesische Form $z = x + iy$ und anschließend die Exponentialform $z = |z|e^{i\varphi}$ zu bestimmen.

(b) Liegen sämtliche zu überlagernde harmonischen Schwingungen in der Form eines Kosinus vor $f_j(t) = A_j\cos(\omega t + \varphi_j)$ für $j = 1, \ldots, n$, so sind zwei Ideen denkbar:

Idee 1:
Über die Phasenverschiebung kann die Kosinusfunktion in eine Sinusfunktion umgeschrieben werden, sodass

$$f_j(t) = A_j\cos(\omega t + \varphi_j) = A_j\sin\left(\omega t + \varphi_j + \frac{\pi}{2}\right) = A_j\sin\left(\omega t + \hat{\varphi}_j\right)$$

mit den modifizierten Phasenverschiebungen $\hat{\varphi}_j = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Damit lässt sich das weiterentwickelte Verfahren aus Aufgabe 5(a) anwenden.

Idee 2:
Aus Aufgabe 3(a) lässt sich ablesen, dass der Realteil anstelle des Imaginärteils von $g_j(t)$ die gegebene Funktion $f_j(t)$ reproduziert:

$$f_j(t) = A_j\cos(\omega t + \varphi_j) = \text{Re}\ g_j(t)$$

Damit ergibt sich mit dem selben Verfahren $g(t) = |z|e^{i(\omega t + \varphi)}$, wovon der Realteil die gesuchte Überlagerung ergibt:

$$f(t) = \text{Re}\ g(t) = |z|\cos(\omega t + \varphi)$$

(c) Sind verschiedene Sinusfunktionen $f_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi_j)$ sowie zusätzliche Kosinusfunktionen $f_k(t) = A_k \cos(\omega t + \varphi_k)$ zu überlagern, so muss eine Entscheidung zu getroffen werden, ob man ***alle Funktionen als Sinus oder als Kosinus*** darstellt. Je nach Häufigkeit der beiden Darstellungen kann eine Möglichkeit effizienter sein als die andere. Eine kanonische Wahl ist es, alle Funktionen stets als Sinus darzustellen und das weiterentwickelte Verfahren aus Aufgabe 5(a) anwenden.

Aufgabe 6 Anwendungsbeispiel aus der Physik/Elektrotechnik
Die Überlagerung der drei Spannungen U_i mit $U_0 > 0$ und

$$\begin{aligned} U_1(t) &= U_0 \sin(\omega t) \\ U_2(t) &= 2U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ U_3(t) &= \sqrt{3}\, U_0 \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

führt mit dem erweiterten Verfahren aus Aufgabe 5(a) bzw. 5(c) zunächst zu $U_2(t) = 2U_0 \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} z &= A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} + A_3 e^{i\varphi_3} \\ &= U_0\Big(1 \cdot e^0 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{3} e^{i\frac{3\pi}{2}}\Big) \\ &= U_0\Big(1 + 2(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) + \sqrt{3}(0 - i)\Big) = 0 \end{aligned}$$

Damit $|z| = 0$, d.h. für die Überlagerung gilt für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0$$

A.3 Projekt 3 - Drehmatrizen und Diagonalisierung

In diesem Projekt zum Kapitel 3 „Lineare Algebra“ sollen Drehmatrizen im Zwei- und Dreidimensionalen sowie das Verfahren zur Diagonalisierung von Matrizen als wichtige Anwendungen vertieft werden.

Aufgabe 1 Drehmatrizen in $\mathbb{R}^2$
Für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die zweidimensionale Drehmatrix gegeben durch

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(a) Wiederholen Sie zunächst zwei bereits bekannte Eigenschaften von D_α:

 (i) Es gilt: $\det(D_\alpha) = 1$ für alle Winkel α.

 (ii) Jede Drehmatrix ist orthogonal: $D_\alpha^{-1} = D_\alpha^\top = D_{-\alpha}$

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von D_α im allgemeinen komplex sind: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$. Führen Sie ferner aus, dass die Eigenwerte genau für die Winkel $\alpha \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ reell sind.

(c) Welche geometrische Interpretation haben die Winkel α, für die es reelle Eigenwerte gibt? Wie lauten für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von D_α?

(d) Zeigen Sie, dass eine erste Drehung um den Winkel α gefolgt von einer zweiten Drehung um den Winkel β eine Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$ erzeugt. Weisen Sie dazu die Identität $D_\beta D_\alpha = D_{\alpha+\beta}$ nach.

Aufgabe 2 Drehmatrizen in $\mathbb{R}^3$
Für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ lautet die dreidimensionalen Drehmatrizen um die Koordinatenachsen x, y und z:

$$D_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, D_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, D_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Im Dreidimensionalen ist das Ergebnis von zwei aufeinander folgenden Drehungen von ihrer Reihenfolge abhängig. Durch die Matrixmultiplikation, die im Allgemeinen nicht kommutativ ist, ergibt sich dies unmittelbar. Zeigen Sie explizit, dass eine Drehung um die x-Achse gefolgt von einer Drehung um die z-Achse (beide Male um den Winkel α) zu einem anderen Ergebnis führt als wenn man zuerst und die z- und anschließend um die x-Achse dreht: $D_{z,\alpha} D_{x,\alpha} \neq D_{x,\alpha} D_{z,\alpha}$.

(b) Betrachten Sie den Unterschied $\Delta D = D_{z,\alpha} D_{x,\alpha} - D_{x,\alpha} D_{z,\alpha}$ aus den Ergebnissen der letzten Teilaufgabe. Argumentieren Sie, warum $\Delta D \in M(3,3)$ keine Drehmatrix darstellt.
Hinweis: Was ist die Determinante von ΔD?

(c) Ein Kommilitone behauptet, dass sich ΔD aus vier speziellen Drehungen zusammensetzt: $\Delta D = D_{z,\alpha+\beta} D_{x,\alpha} D_{y,\beta} D_{z,\alpha}$ mit $\beta = 2\alpha$. Wie können Sie mit einem sehr kurzen Argument die Behauptung widerlegen?

Aufgabe 3 Diagonalisierung von Matrizen - Methodik und Beispiele

Für eine gegebene Matrix $A \in M(n,n)$ ist bei der Diagonalisierung das Ziel, eine neue Basis zu finden, in der die lineare Abbildung möglichst einfach ist. Möglichst einfach heißt, dass sie als Diagonalmatrix dargestellt werden kann. Dazu sind stets folgende Schritte notwendig:

1. Berechnung aller **Eigenwerte** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der Matrix A. Diese können auch mehrfach auftreten, z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. Berechnung aller **Eigenvektoren** $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Treten Eigenwerte mehrfach auf, z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$, so sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ die Eigenvektoren zu diesem (doppelten) Eigenwert.

3. Aufstellen der Matrix T zur **Transformation**. Die Spalten von T werden gebildet aus den Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, die eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden[1].

4. Berechnen der **inversen Matrix** T^{-1}. Für den Fall, dass B eine ONB ist, ist dies aufgrund der orthogonalen Matrix sehr einfach gegeben durch $T^{-1} = T^\top$.

5. Als letzten Schritt ist zur **Überprüfung** der gesamten Rechnung $T^{-1}AT$ zu berechnen. Als Ergebnis erhält man eine Diagonalmatrix D, die aus den Eigenwerten der Matrix A besteht: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

(a) Diagonalisieren Sie die beiden nachstehenden 2×2-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Zwischenergebnis: Die Eigenwerte von A lauten 3 und 1, die von B lauten 9 und 4.

(b) Diagonalisieren Sie nachstehende 3×3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zwischenergebnis: Die Eigenwerte von A lauten 6, 3 und 2.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Spalten von T aufeinander senkrecht stehen. Wenn Sie nun Eigenvektoren mit Länge 1 wählen, dann ist T orthogonal und Sie können $T^{-1} = T^\top$ verwenden. Alternativ ist T^{-1} wie gewohnt mit dem Gauß-Algorithmus berechenbar.

(c) Diagonalisieren Sie auch nachstehende 3×3-Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bei der Rechnung werden Sie neben $\lambda = 7$ auf den doppelten Eigenwert $\lambda = 1$ stoßen. Für diesen gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Wählen Sie den zweiten dieser Eigenvektoren zu $\lambda = 1$ in der Form, dass er senkrecht auf dem ersten Eigenvektor zu $\lambda = 1$ steht. Damit ist es leichter, eine ONB aus Eigenvektoren, d.h. eine orthogonale Matrix T, zu erstellen. Alternativ können Sie T^{-1} wieder über Gauß berechnen.

---

[1] Dies ist abgesehen von wenigen Ausnahmen immer erfüllt. Die Eigenvektoren einer Matrix A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$ zum Beispiel, wenn A symmetrisch ist, $A^\top = A$, oder wenn alle Eigenwerte verschieden sind.

Im Folgenden wird ein **Lösungsvorschlag** für das Projekt vorgestellt

Aufgabe 1 Drehmatrizen in $\mathbb{R}^2$

Für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die zweidimensionale Drehmatrix gegeben durch

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(a) Zunächst wiederholen wir zwei bereits bekannte Eigenschaften von D_α:

(i) Es gilt: $\det(D_\alpha) = \cos^2(\alpha) - (-\sin^2(\alpha)) = 1$ für alle Winkel α.

(ii) Jede Drehmatrix ist orthogonal:

$$D_\alpha D_\alpha^\top = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Damit folgt die Behauptung $D_\alpha^{-1} = D_\alpha^\top$. Aufgrund der Symmetrien der Kosinus-Funktion (gerade) und Sinus-Funktion (ungerade) gilt ferner $D_\alpha^\top = D_{-\alpha}$.

(b) Für das charakteristische Polynom von D_α gilt:

$$\chi(\lambda) = \det(D_\alpha - \lambda E_2) = (\cos(\alpha) - \lambda)^2 + \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1$$

Nullstellen von $\chi(\lambda)$ ergeben sich zu

$$\chi(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{2\cos(\alpha) \pm \sqrt{4\cos^2(\alpha) - 4}}{2}$$
$$= \cos(\alpha) \pm i\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

Die letzte Umformung ist sinnvoll, da damit unter der Wurzel stets eine nicht-negative Zahl steht, $1 - \cos^2(\alpha) \geq 0$. Die Eigenwerte von D_α sind im Allgemeinen komplex: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\lambda_{1,2}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(\alpha) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

(c) (i) Für $\alpha = 0$ ist die Drehmatrix die Einheitsmatrix $D_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$, d.h. es findet keine Drehung statt. Die Eigenwerte lauten: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ (doppelt) mit Eigenvektoren aus $\ker(D_{\alpha=0} - E_2) = \mathbb{R}^2$ (gesamter Vektorraum).

(ii) Für $\alpha = \pi$ ist die Drehmatrix die negative Einheitsmatrix $D_{\alpha=\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2$, d.h. alle Vektoren erhalten ein negatives Vorzeichen[1]. Die Eigenwerte lauten: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ (doppelt) mit Eigenvektoren aus $\ker(D_{\alpha=\pi} + E_2) = \mathbb{R}^2$ (gesamter Vektorraum).

[1] Dies entspricht einer zweidimensionalen Punktspiegelung (am Ursprung), was dem Namen nach wenig intuitiv mit einer Drehung in Verbindung gebracht wird.

(d) Es gilt mit den Additionstheoremen für die Sinus- und Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned}
D \; D \; &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) \quad \sin(\beta)\sin(\alpha) & [\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)] \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = D_{\;+}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Drehmatrizen in $\mathbb{R}^3$

Für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ lauten die dreidimensionalen Drehmatrizen um die Koordinatenachsen x, y und z:

$$D_{x;} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, D_{y;} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, D_{z;} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
D_{z;} \; D_{x;} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
D_{x;} \; D_{z;} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \neq D_{z;} \; D_{x;}
\end{aligned}$$

(b) Es ergibt sich als Differenz $\Delta D = D_{z;} \; D_{x;} \quad D_{x;} \; D_{z;}$:

$$\Delta D = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\alpha)[1 \quad \cos(\alpha)] & \sin^2(\alpha) \\ \sin(\alpha)[1 \quad \cos(\alpha)] & 0 & \sin(\alpha)[1 \quad \cos(\alpha)] \\ \sin^2(\alpha) & \sin(\alpha)[1 \quad \cos(\alpha)] & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt für die Determinante:

$$\det(\Delta D) = 0 \quad \sin^4(\alpha)[1 \quad \cos(\alpha)]^2 + \sin^4(\alpha)[1 \quad \cos(\alpha)]^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \neq 1$$

Da $\det(\Delta D) = 0 \neq 1$ gilt, kann ΔD keine Drehmatrix sein.

(d) Angenommen, die Differenzmatrix ΔD ließe sich darstellen als $\Delta D = D_{z;\;+} \; D_{x;} \; D_{y;} \; D_{z;}$ (β ist dabei ein beliebiger Winkel), so ist die Determinante auf der linken Seite $\det(\Delta D) = 0$, auf der rechten Seite jedoch

$$\det(D_{z;\;+} \; D_{x;} \; D_{y;} \; D_{z;}) = \det(D_{z;\;+}) \; \det(D_{x;}) \; \det(D_{y;}) \; \det(D_{z;}) = 1 \; 1 \; 1 \; 1 = 1 \neq 0$$

Der Widerspruch zeigt, dass ΔD nicht in der angegeben Form dargestellt werden kann.

Aufgabe 3

(a) Gegeben sind die 2 2-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A}$ $\quad \chi_A(\lambda) = (11 \quad \lambda)(\;9 \quad \lambda) \quad (\;96) = \lambda^2 \quad 2\lambda \quad 3 = (\lambda \quad 3)(\lambda + 1)$

$\lambda_1 = 3$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A \quad 3E_2) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix})$

$\lambda_2 = \quad 1$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A + E_2) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

Damit ist $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\det(T) = \quad 1$, also $T \;\; ^1 = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Es ergibt sich in der neuen Basis T:

$$T \;\; ^1AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{X}$$

$\boxed{B}$ $\quad \chi_B(\lambda) = (8 \quad \lambda)(5 \quad \lambda) \quad 4 = \lambda^2 \quad 13\lambda + 36 = (\lambda \quad 9)(\lambda \quad 4)$

$\lambda_1 = 9$ mit Eigenvektoren aus $\ker(B \quad 9E_2) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$

$\lambda_2 = 4$ mit Eigenvektoren aus $\ker(B \quad 4E_2) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

Damit ist $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det(T) = \quad 5$, also $T \;\; ^1 = \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Es ergibt sich in der neuen Basis T:

$$T \;\; ^1BT = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{X}$$

(b) Gegeben ist die 3 3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \quad \lambda^3 + 7\lambda^2 \quad 36 = (\lambda \quad 6)(\lambda \quad 3)(\lambda + 2)$; (mittels Polynomdivision)

$\lambda_1 = 6$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A \quad 6E_3) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$

$\lambda_2 = 3$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A \quad 3E_3) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

$\lambda_3 = \quad 2$ mit Eigenvektoren aus $\ker(A + 2E_3) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

Damit ist $\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine mögliche Transformationsmatrix mit aufeinander senkrecht stehenden Spalten, die allerdings nicht normiert sind. Mittels Gauß-Algorithmus kann die Inverse von $\widetilde{T}$ bestimmt werden. Alternativ führt eine Normierung der Spalten von $\widetilde{T}$ mit $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2}$ zu einer orthogonalen Matrix T:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad) \quad T^{\;1} = T^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Also mit $T^{\;1}AT = T^{\top}AT$ ergibt sich in der neuen ONB:

$$T^{\top}AT = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad X$$

(c) Gegeben ist die 3 3-Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{B}$ $\quad \chi_B(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 \quad 15\lambda + 7 = (\lambda \quad 7)(\lambda \quad 1)^2$; (mittels Polynomdivision)

$\lambda_1 = 7$ mit Eigenvektoren aus $\ker(B \quad 7E_3) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$

$\lambda_{2;3} = 1$ mit Eigenvektoren aus $\ker(B \quad E_3) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

Die drei linear unabhängigen Eigenvektoren stehen nicht aufeinander senkrecht, allerdings gilt für den Spann der Eigenvektoren zum doppelten Eigenwert $\lambda_{2;3} = 1$:

$$\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Dies ist ersichtlich, indem man den ersten Eigenvektor auf den zweiten addiert, wodurch sich der Spann, d.h. die Menge aller Linearkombinationen dieser beiden Vektoren, nicht verändert. Die damit gefundene mögliche Transformationsmatrix lautet $\widetilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Spalten stehen nun aufeinander senkrecht, sind aber wiederum nicht normiert. Analog zu oben ergibt sich als orthogonale Transformationsmatrix:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad) \quad T^{\;1} = T^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

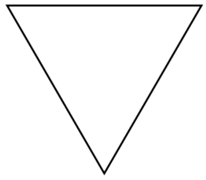
Also mit $T^{\;1}BT = T^{\top}BT$ ergibt sich in der neuen ONB:

$$T^{\top}BT = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X$$

A.4 Projekt 4 - Fraktale

In diesem Projekt zum Kapitel 4 „Grenzwerte“ sollen Fraktale als geometrische Objekte mit hochspannenden Eigenschaften anhand von zwei Beispielen vorgestellt werden.

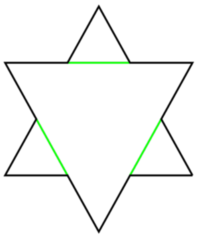
Aufgabe 1 Kochsche Schneeflocke[1]



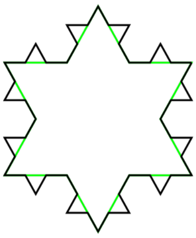
Gleichseitiges Dreieck

(a) Betrachte ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a_0. Was ist dessen Höhe h_0 und Flächeninhalt A_0?

Erste Iteration



(b) In einer ersten Iteration wird jede Seite des Dreiecks in drei gleiche Teile eingeteilt und die jeweils mittleren Teile zu neuen gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{3}a_0$ ergänzt. A_1 bezeichnet die Gesamtfläche der neu hinzugekommenen drei Dreiecke. Berechnen Sie diese Fläche.



Zweite Iteration

(c) In einer zweiten Iteration wird jeder der zwölf Streckenabschnitte der ersten Iteration wieder in drei gleiche Teile eingeteilt und die jeweils mittleren Teile wieder zu neuen gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge $a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{9}a_0$ ergänzt. A_2 bezeichnet die Gesamtfläche der neu hinzugekommenen zwölf Dreiecke. Berechnen Sie auch diese Fläche.

(d) Iteriert man dieses Vorgehen n Mal, so entsteht mit jedem Schritt eine größere Zahl an neuen Dreiecken. Berechnen Sie die neu hinzukommende Gesamtfläche A_n des n-ten Schritts, indem Sie die zugrundeliegende Systematik für A_1, A_2, A_3 untersuchen und verallgemeinern.

(e) Wiederholt man diesen Vorgang beliebig oft, so entsteht die so genannte Kochsche Schneeflocke mit einer Fläche von

$$A = A_0 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n$$

Zeigen Sie, dass die Kochsche Schneeflocke eine endliche Fläche $A = \frac{2a_0^2\sqrt{3}}{5}$ besitzt.

(f) Es bezeichne L_n die Länge der Kochschen Schneeflocke nach n Iterationen mit $L_0 = 3a_0$. Berechnen Sie zunächst einen expliziten Ausdruck für L_n und zeigen Sie anschließend, dass die Länge der Kochschen Schneeflocke divergiert, d.h. $L = \lim_{n\to\infty} L_n = \infty$ gilt.

[1] Quelle für Graphiken: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1898291 (01.12.2019) und https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1225322 (01.12.2019)

Aufgabe 2 Die Schnecke
Es sei $0 < c < 1$ und $P_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ der Startpunkt zur nachfolgenden Konstruktion einer geometrischen Schneckenfigur. In einem ersten Schritt läuft man die Strecke 1 nach rechts zum Zielpunkt $P_1 = (1,0)$. An diesem Punkt dreht man sich um 90° nach links. In einem zweiten Schritt läuft man die Strecke c nach oben zum Zielpunkt $P_2 = (1,c)$ und dreht sich wiederum um 90° nach links. In jedem nächsten Schritt läuft man eine um den Faktor c verkürzte Strecke geradeaus und dreht sich danach immer um 90° nach links: $P_3 = (1-c^2, c)$, $P_4 = (1-c^2, c-c^3)$, $P_5 = (1-c^2+c^4, c-c^3)$, $P_6 = (1-c^2+c^4, c-c^3+c^5)$ usw.

(a) Begründen Sie, dass der Zielpunkt der N-ten Iteration gegeben ist durch

$$P_{N=2n} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^{2k} \,,\quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^{2k+1} \right)$$

$$P_{N=2n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c^{2k} \,,\quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^{2k+1} \right)$$

Hinweis: Zeigen Sie etwa, dass diese Darstellung die Punkte $P_1, \ldots, P_6, \ldots$ reproduziert.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Zielpunkt P_N für eine wachsende Zahl an Iterationen dem Punkt

$$P(c) = \lim_{N\to\infty} P_N = \left(\frac{1}{1+c^2} \,,\ \frac{c}{1+c^2} \right)$$

annähert. Untersuchen Sie $P(c)$ insbesondere für $c = \frac{1}{2}$ und $c \to 0$, $c \to 1$.

(c) Es bezeichne L_N die Länge des gesamten Streckenzugs $P_1P_2\cdots P_N$ der Schnecke nach N Iterationen. Zeigen Sie, dass die Länge der gesamten Schnecke

$$L(c) = \lim_{N\to\infty} L_N < \infty$$

endlich ist und untersuchen Sie $L(c)$ insbesondere für $c = \frac{1}{2}$ und $c \to 0$, $c \to 1$.
Zusatzfrage: Für welches c besitzt die gesamte Schnecke eine Länge von 42?

(d) Überlegen Sie, dass sich die Aufgabe im Komplexen neu interpretieren/beschreiben lässt mithilfe eines Startpunkts $P_0 = 0 \in \mathbb{C}$ und einem additiven Inkrement $(ic)^k$ für

$$P_N = \sum_{k=0}^{N} (ic)^k \in \mathbb{C}$$

Finden Sie im Grenzwert den Zielpunkt $P(c) = \lim\limits_{N\to\infty} P_N \in \mathbb{C}$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der vorherigen reellen Betrachtung. Gehen Sie dabei auch auf die Darstellungen von $P_{N=2n} \in \mathbb{R}^2$ und $P_{N=2n+1} \in \mathbb{R}^2$ ein.

Im Folgenden wird ein **Lösungsvorschlag** für das Projekt vorgestellt

Aufgabe 1 Kochsche Schneeflocke

(a) Für die Höhe h_0 eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a_0 gilt mit Pythagoras:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + h_0^2 = a_0^2 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{a_0}{2}\sqrt{3}$$

Für den Flächeninhalt gilt:

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0 h_0 = \frac{a_0^2}{4}\sqrt{3}$$

(b) Der Flächeninhalt der drei neuen Dreiecke ergibt sich mit $a_1 = \frac{a_0}{3}$ und $h_1 = \frac{a_1}{2}\sqrt{3}$ zu:

$$A_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} a_1 h_1 = 3 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{3}\right)^2 \sqrt{3}$$

(c) In der zweiten Iteration erhält man $12 = 3 \cdot 4$ neue Dreiecke mit $a_2 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_0}{3^2}$ und $h_2 = \frac{a_2}{2}\sqrt{3}$:

$$A_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} a_2 h_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{3^2}\right)^2 \sqrt{3}$$

(d) Für die Verallgemeinerung ist es wichtig, dass mit jeder Iteration viermal so viele neue Dreiecke erzeugt werden wie im Schritt zuvor. Die n-te Iteration ergänzt $3 \cdot 4^{n-1}$ Dreiecke. Mit $a_n = \frac{a_0}{2}$ und $h_n = \frac{a_n}{2}\sqrt{3}$ ergibt sich:

$$A_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{2} a_n h_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{a_0}{3^n}\right)^2 \sqrt{3}$$

Dieser allgemeine Ausdruck enthält die bereits betrachteten Spezialfälle A_1 und A_2,

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned} A &=: A_0 + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} A_n \\ &= \frac{a_0^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}a_0^2}{16} \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{4}{9}\right)^n}_{S_N} \end{aligned}$$

Die Summe S_N ergibt mithilfe der geometrischen Summenformel, $\sum\limits_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{4}{9}\right)^n - 1 = (\ldots) = \frac{4}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^N\right) \to \frac{4}{5} \text{ (für } N \to \infty\text{)}$$

Für den Flächeninhalt ergibt sich somit:

$$A = \frac{a_0^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}a_0^2}{16} \cdot \frac{4}{5} = \underbrace{\frac{5\sqrt{3}a_0^2}{20}}_{\hat{=}\, 62{,}5\%} + \underbrace{\frac{3\sqrt{3}a_0^2}{20}}_{\hat{=}\, 37{,}5\%} = \frac{2\sqrt{3}}{5}a_0^2$$

Damit ist der Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke endlich: $A < \infty$.

(f) Die anfängliche Länge der Kochschen Schneeflocke ist $L_0 = 3a_0$. Im ersten Schritt wird $\frac{a_0}{3}$ entfernt und $2 \cdot \frac{a_0}{3}$ eingefügt. Dies erfolgt auf allen drei Seiten:

$$L_1 = 3\left(a_0 - \frac{a_0}{3} + 2 \cdot \frac{a_0}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} a_0 = \frac{4}{3} \cdot L_0$$

Im zweiten Schritt wächst jeder Streckenabschnitt auf das $\frac{4}{3}$-fache:

$$L_2 = \frac{4}{3} \cdot L_1 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 a_0$$

Damit folgt für die Verallgemeinerung:

$$L_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n a_0$$

Für die Gesamtlänge ergibt sich:

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n = \infty$$

Damit ist die Umrandung (Hülle) der Kochschen Schneeflocke unendlich, obwohl der darin eingeschlossene Flächeninhalt nur endlich ist.

Aufgabe 2 Die Schnecke

Es ergeben sich aufgrund der Konstruktionsvorschrift die folgenden nächsten vier Punkte:

$$\begin{aligned}
P_7 &= (1 - c^2 + c^4 - c^6, c - c^3 + c^5)\\
P_8 &= (1 - c^2 + c^4 - c^6, c - c^3 + c^5 - c^7)\\
P_9 &= (1 - c^2 + c^4 - c^6 + c^8, c - c^3 + c^5 - c^7)\\
P_{10} &= (1 - c^2 + c^4 - c^6 + c^8, c - c^3 + c^5 - c^7 + c^9)
\end{aligned}$$

Die Abstände d_n zwischen P_n und P_{n+1} verkürzen sich mit jedem Schritt um den Faktor c:

$$d_n = |\overline{P_n P_{n+1}}| = c^n$$

Etwa: $d_0 = |\overline{P_0 P_1}| = |(1, 0)| = 1 = c^0$, $d_7 = |\overline{P_7 P_8}| = |(0, -c^7)| = c^7$ oder $d_8 = |\overline{P_8 P_9}| = |(c^8, 0)| = c^8$

(a) Aus der Konstruktion ergibt sich:

- In der x-Koordinate stehen nur gerade Exponenten, die Summanden besitzen ein alternierendes Vorzeichen
- In der y-Koordinate stehen nur ungerade Exponenten, die Summanden besitzen ein alternierendes Vorzeichen
- Bei geradem Index gibt es gleich viele Summanden in x- und y-Koordinate
- Bei ungeradem Index erhält die y-Komponente einen zusätzlichen Summanden

Dies lässt sich darstellen als:

$$P_{N=2n} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^{2k}, \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^{2k+1}\right)$$

$$P_{N=2n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c^{2k}, \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^{2k+1}\right)$$

Durch explizites Nachrechnen/Einsetzen lässt sich nachweisen, dass die ersten Punkte $P_1, P_2, \ldots$ dadurch beschrieben werden.

(b) Die x-Koordinate von $P_{N=2n}$ lautet für $N \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P^{(x)}_{N=2n} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^{2k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-c^2)^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-c^2)^n}{1-(-c^2)} = \frac{1}{1+c^2} \qquad (\text{denn } 0<c<1, \text{ also } 0<c^2<1)
\end{aligned}$$

Die y-Koordinate von $P_{N=2n}$ enthält nur einen zusätzlichen Faktor c:

$$\lim_{N\to\infty} P^{(y)}_{N=2n} = \frac{c}{1+c^2}$$

Für die ungeraden $P_{N=2n+1}$ ist die y-Koordinate identisch, die Grenze der x-Koordinate ist um einen Summanden größer, weshalb sie den selben Grenzwert besitzt. Zusammengefasst:

$$P(c) = \lim_{N\to\infty} P_N = \left(\frac{1}{1+c^2}, \frac{c}{1+c^2}\right)$$

Untersuchung des Grenzwertes für den Zielpunkt der Schnecke:

Für $c = \frac{1}{2}$: $P(\frac{1}{2}) = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$
Für $c \to 0$: $P(0) = (1, 0) = P_1$
In diesem Grenzfall wird nur der erste Schritt von P_0 nach P_1 ausgeführt, keine weitere Bewegung außer sukzessive Drehungen am Punkt P_1.
Für $c \to 1$: $P(1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Dies entspricht dem Mittelpunkt der Bewegung entlang des Quadrats $(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (0,1) \to (0,0) \to \ldots$

(c) Die Länge der Schnecke nach N-Iterationen ist

$$L_N = \sum_{n=0}^{N-1} c^n = \frac{1-c^N}{1-c}$$

Im Grenzwert ergibt sich:

$$L(c) = \lim_{N\to\infty} L_N = \frac{1}{1-c} < \infty \qquad (\text{für } 0<c<1)$$

Untersuchung des Grenzwertes für die Gesamtlänge der Schnecke:

Für $c = \frac{1}{2}$: $L(\frac{1}{2}) = 2$
Für $c \to 0$: $L(0) = 1$
In diesem Grenzfall ist die Gesamtlänge nur der Abstand $d_0 = 1$ zwischen P_0 und P_1.
Für $c \to 1$: $L(1) \to \infty$
Dies entspricht der ständigen Bewegung entlang des Quadrats $(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (0,1) \to (0,0) \to \ldots$ In diesem Fall ist die Konvergenz der Gesamtlänge nicht gegeben.

Zusatzantwort: Eine Gesamtlänge von $L(c_0) = 42$ ergibt sich für $c_0 = \frac{41}{42}$.

(d) Interpretiert man die Schnecke als Bewegung in der komplexen Ebene, so ist der Startpunkt $P_0 = 0 \in \mathbb{C}$. Die sukzessiven Schritte nach rechts, oben, links und unten einer sich um den Faktor c verkürzende Länge wird im k-ten Schritt durch $(ic)^k$ beschrieben. Die (ersten) Schritte lauten damit: $(1, ic, -c^2, -ic^3, c^4, ic^5, -c^6, -ic^7, c^8, \ldots)$. Der N-te Zielpunkt ist dabei die Summe dieser Inkremente:

$$P_N = \sum_{k=0}^{N} (ic)^k$$

Für den Grenzwert $N \to \infty$ gilt:

$$P(c) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} (ic)^k = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - (ic)^{N+1}}{1 - ic} = \frac{1}{1 - ic} = \frac{1 + ic}{1 + c^2}$$

Im Vergleich mit der reellen Betrachtung $P(c) \in \mathbb{R}^2$ enthält jener als erste Komponente den Realteil $\frac{1}{1+c^2}$ und als zweite Komponente den Imaginärteil $\frac{c}{1+c^2}$. Diese Aufteilung des Real- und Imaginärteils auf die beiden reellen Komponenten gilt analog für die N-te Iteration $P_N \in \mathbb{R}^2$. Im Komplexen ist dabei keine Fallunterscheidung hinsichtlich $N = 2n$ (gerade) und $N = 2n + 1$ (ungerade) vorzunehmen.